Mètodes d'elements finits en mecànica de fluids

PRÀCTICA 1

1. Sigui $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ i considerem el problema

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 && \text{a } \Omega \\ \phi &= 0 && \text{per a } x = 0,1,\ y = 0 \\ \phi &= x(1-x) && \text{per a } y = 1. \end{aligned}$$

Definim la base de funcions $\{\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\}$, $m, n = 1, 2, ...$ Plantegeu l'aproximació de Galerkin del problema anterior en aquesta base, indicant les particularitats del sistema algebraic resultant en comparació amb el que s'obtindria fent servir un esquema de diferències finites de segon ordre.

2. Considerem un element biquadràtic de Lagrange amb domini $\Omega^e = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. El costat $x = x_2$ està sobre la vora del domini computacional Ω. Obtingueu la forma feble del problema

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= f && \text{a } \Omega \\ \phi &= 0 && \text{a } \partial\Omega - \{x = x_2\} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} + \alpha\phi &= h && \text{per a } x = x_2, \end{aligned}$$

i determineu la matriu de rigidesa de l'element indicat.

3. Considerem el problema unidimensional

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \lambda u &= f \qquad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

i suposem que el domini $\Omega = (0,1)$ es discretitza amb N elements cúbics.

a) Obtingueu l'expressió de la matriu de rigidesa del problema fent servir elements lagrangians (de classe C^0) i hermítics (de classe C^1).
b) Expliqueu qualitativament com han de ser les corbes de les quantitats següents

$$\log \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad \log \|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \log \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$$

vs N en els casos $\lambda = 1$ i $\lambda = 10^4$ fent servir elements lagrangians i hermítics.

Mètodes d'elements finits en mecànica de fluids

PRÀCTICA 2

1. Considerem l'equació de convecció-difusió unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad 0 < x < 1,$$

amb $\epsilon > 0$, $\beta > 0$. Suposem que l'intèrval $[0, 1]$ es discretitza amb elements finits lineals d'igual longitud h i que es fa servir la formulació SUPG, juntament amb el mètode d'Euler endavant per discretitzar en el temps. Per tal de fer el mètode totalment explícit, la matriu de massa es pren diagonal. Demostreu que l'algorisme resultant compleix la condició d'estabilitat de von Neumann si, i només si,

$$c \leq \frac{\gamma}{1 + \alpha\gamma}$$

on α és la funció d'upwind del mètode SUPG, γ és el nombre de Péclet de la partició i $c := \beta\Delta t/h$ és el nombre de Courant, essent Δt el tamany del pas de temps.
Dibuixeu la regió d'estabilitat dictada per la condició anterior i la que s'obtindria si $\alpha = 0$ (mètode de Galerkin).
Demostreu també que quan $\beta = 0$ l'algorisme és estable si, i només si,

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{2\epsilon}$$

2. Demostreu que el mètode de Galerkin discontinu en el temps aplicat a l'equació de convecció-difusió és estable.

3. Justifiqueu el fet que el mètode de les característiques-Galerkin introdueixi difusió segons les línies de corrent a l'equació de convecció-difusió (Indicació: per fer-ho, integreu amb un esquema de segon ordre l'equació de les trajectòries $X(t)$. A continuació feu un desenvolupament de Taylor de la funció incògnita u en la posició del temps anterior, $u(X(t^{n-1}))$, per tal d'expressar-la en termes de la funció incògnita en la posició actual, $u(X(t^n))$).

4. Llegiu i comenteu el següent article:

O. PIRONNEAU, J. LIOU and T. TEZDUYAR.
Characteristic-Galerkin and Galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equation with time-dependent domains.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 100, 117–141 (1992).

En particular, avalueu críticament els dos mètodes que s'analitzen i adduïu motius per fer-ne servir un d'ells.

Mètodes d'elements finits en mecànica de fluids

PRÀCTICA 3

1. Considerem el sistema d'equacions lineals resultant de la discretització pel mètode dels elements finits del problema de Stokes penalitzat:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{t}} & -\varepsilon \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\varepsilon} \\ \boldsymbol{P}^{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

Siguin $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{P}$ la solució del problema sense penalitzar, és a dir, amb $\varepsilon = 0$. Demostreu que

$$\|\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}^{\varepsilon}\| = O(\varepsilon) \quad \text{i} \quad \|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{\varepsilon}\| = O(\varepsilon)$$

per a qualsevol matriu $\boldsymbol{M}$ definida positiva.

2. Suposem que el domini $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ es discretitza amb una malla uniforme de 4×4 elements Q_1/P_0, enumerats per files d'esquerra a dreta i de baix a dalt. Amb aquesta malla es pretén resoldre el problema de Stokes amb condició de contorn $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ a $\partial\Omega$. Si $\boldsymbol{G}$ és la matriu que prové del terme de gradient de pressió, demostreu que $\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_{\mathrm{esp}} = \boldsymbol{0}$, on $\boldsymbol{P}_{\mathrm{esp}}^{\mathrm{t}} = (1, -1, 1, -1, ...)$. Quina conclusió en podeu treure ?

3. Llegiu el següent article:

F. BREZZI AND K.J. BATHE
A discourse on the stability conditions for mixed finite element formulations.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 82, 27–57 (1990).

Particularitzeu l'enunciat de la Proposició 3.2 i del Teorema 3.2 al problema de Stokes amb la formulació de tres camps $\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{u} - p$, on $\boldsymbol{\sigma}'$ és la part desviadora del tensor de tensions.

Mètodes d'elements finits en mecànica de fluids

PRÀCTICA 4

A continuació es descriuen tres mètodes numèrics per a resoldre les equacions de Navier-Stokes per a fluids incompressibles:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

amb condicions de contorn de Dirichlet homogènies i una condició inicial donada. En tots els casos es considera que la discretització espacial es fa amb elements finits.

Per a cadascun dels mètodes, indiqueu breument:

1. Exactitud temporal esperada i possibles problemes que poden aparèixer a l'avançar en el temps.
2. Possibles discretitzacions espacials, discutint-ne avantatges i inconvenients.
3. Equacions discretes i linealitzades de l'algorisme, així com un diagrama de flux succint per a la programació en ordinador. Si algun aspecte del mètode no queda ben definit, trieu-ne una possibilitat.

Mètode A

- Discretització temporal: mètode de Crank-Nicolson per al terme viscós i aproximació explícita de segon ordre per al terme convectiu.
- Linealització del terme convectiu: no s'escau.
- Tècnica d'estabilització del terme convectiu: mètode SUPG.
- Tractament de la incompressibilitat: ús d'interpolacions mixtes velocitat-pressió div-estables.

Mètode B

- Discretització temporal: mètode de les característiques-Galerkin.
- Linealització del terme convectiu: mètode de punt fix (Picard).
- Tècnica d'estabilització del terme convectiu: no s'escau.
- Tractament de la incompressibilitat: ús d'interpolacions mixtes velocitat-pressió div-estables.

Mètode C

- Discretització temporal: mètode de dos passos completament implícit de segon ordre.
- Linealització del terme convectiu: Newton-Raphson.
- Tècnica d'estabilització del terme convectiu: mètode SUPG.
- Tractament de la incompressibilitat: ús d'igual interpolació velocitat-pressió, fent servir la tècnica d'estabilització de Brezzi-Douglas.

Mètodes d'elements finits en mecànica de fluids

PRÀCTICA 5

Trieu algun domini bidimensional on resoldre les equacions de Navier-Stokes estacionàries per a fluids incompressibles amb les condicions de contorn que us semblin adients. Per exemple:

- Un quadrat amb la velocitat prescrita a la part superior
- Un domini en forma de U
- Una bifurcació
- Una expasio (problema del grao)

Prengeu uns valors de densitat i viscositat de manera que el número de Reynolds sigui petit (si teniu problemes de convergència, augmenteu el valor de la viscositat).

Feu algun dels estudis següents (el que volgueu):

1. Feu servir el mètode de penalització amb algun element de pressió discontínua (per exemple el Q_2/P_1). Correu el programa amb 4 valors del paràmetre de penalització ϵ i dibuixeu la corba $\|\boldsymbol{G}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{U}\|$ en funció de ϵ.
2. Per a 3 valors de la viscositat, dibuixeu el logaritme del residu en funció del número d'iteració fent servir els mètodes de Picard i de Newton-Raphson de linealització.
3. Compareu els valors màxims i mínims de la pressió i de la funció de corrent fent servir els següents elements (amb malles d'aproximadament el mateix nombre de nodes): Q_1/P_0, Q_2/P_1, P_2/P_0 i P_2^+/P_1.