Fonaments d'anàlisi funcional en mecànica de medis continus

PRÀCTICA 1

1. Siguin $1 \leq p \leq p' \leq \infty$. Demostreu que

$$L^{p'}(\Omega) \subset L^p(\Omega),$$

on Ω és un domini obert i fitat de $\mathbb{R}^n$. Demostreu també que la injecció $i : L^{p'}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ és contínua, és a dir, existeix una constant $C > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq C\|u\|_{p'} \quad \forall u \in L^{p'}(\Omega).$$

2. Sigui ℓ_p l'espai de succesions $\boldsymbol{x} = \{x_n\}$ de números reals tals que $\|\boldsymbol{x}\|_p := (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ és finit, $1 \leq p < \infty$, i ℓ_∞ l'espai de successions acotades. Sigui $\boldsymbol{x} \in \ell_p$, $1 < p < q$, i sigui $\boldsymbol{y}$ una successió tal que la sèrie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ és convergent per a qualsevol $\boldsymbol{x}$ de ℓ_p. Demostreu que $\boldsymbol{y} \in \ell_q$, amb $p + q = pq$. (Indicació: Considereu l'operador A de ℓ_p a ℓ_∞ definit per $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$, on $z_m = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$, i feu servir el teorema de la gràfica tancada).

3. Considerem el sistema lineal

$$f_i(u) = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

on $u \in B$, B és un espai de Banach, els λ_i són escalars fixos i les f_i són funcionals lineals continus. Demostreu que aquest sistema té solució $u \in B$ si, i només si, per a n escalars qualssevol $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n$ es compleix que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i = 0.$$

(Indicació: considereu el problema en un espai de dimensió n i apliqueu el teorema de Hahn-Banach).

4. Siguin $x_1^n < x_2^n < ... < x_n^n$ n punts a l'intèrval $[0, 1]$ i considerem la següent regla d'integració numèrica per a funcions $f \in C[0, 1]$:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(x_k^n) =: Q_n(f),$$

on els coeficients a_{nk} són constants que compleixen

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| < M, \quad \forall n \geq 1$$

essent M una constant. Suposem que $Q_n(f)$ és exacta per a polinomis de grau $n-1$. Demostreu aleshores que

$$\lim_{n\to\infty} \left[Q_n(f) - \int_0^1 f(x)dx \right] = 0$$

i caracteritzeu el tipus de convergència que aquest limit defineix en termes de la convergència a $C[0, 1]$ (amb la topologia induïda per la norma del suprem).

Fonaments d'anàlisi funcional en mecànica de medis continus

PRÀCTICA 2

1. Sigui $\{u_n\}$ una successió d'elements d'un espai de Hilbert H. Demostreu que si $(u_n, u) \to (u, u)$ i $\|u_n\| \to \|u\|$ llavors $u_n \to u$, és a dir, $\|u_n - u\| \to 0$, essent $\|\cdot\|$ la norma induïda pel producte escalar de H.

2. Sigui X l'espai $C^0([-1,1])$ dotat del producte escalar $(f,g) = \int_{-1}^{1} fg dx$. Sigui X_1 el subespai de X format per les funcions parells (i.e., si $f \in X_1$ llavors $f(x) = f(-x)$) i X_2 el format per les funcions senars (i.e., si $f \in X_2$ llavors $f(x) = -f(-x)$). Demostreu que $X = X_1 \oplus X_2$ i que X_1 i X_2 són ortogonals. És X un espai de Hilbert ?.

3. Siguin p, q i r funcions reals a l'intèrval $[a,b]$, amb $p(x) > 0$ i $r(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$, i considerem l'operador diferencial $\mathcal{L}(u(x)) \equiv (r(x)u'(x))' + q(x)u(x)$, on $'$ indica derivació respecte de x. S'anomena *problema de Sturm-Liouville* el problema d'autovalors de $\mathcal{L}$ amb pes p, és a dir, el de trobar constants λ i funcions $u(x)$ tals que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u(x)) &= -\lambda p(x)u(x), \qquad x \in (a,b), \\ a_1 u(a) + a_2 u'(a) &= 0, \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) &= 0, \end{aligned}$$

on a_1, a_2, b_1 i b_2 són constants. Considerem el producte escalar $(u,v)_p = \int_a^b p(x)u(x)v(x)dx$. Demostreu que si λ_n i λ_m són autovalors diferents, les autofuncions corresponents $u_n(x)$ i $u_m(x)$ són ortogonals.

4. La fletxa $v(x)$ d'una biga de longitud ℓ i rigidesa a flexió EI és solució del problema de contorn

$$\begin{aligned} EI\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} &= q(x), \\ -EIv''(0) = M_0, &\quad EIv'''(0) = Q_0, \\ -EIv''(\ell) = M_1, &\quad EIv'''(\ell) = Q_1, \end{aligned}$$

on $q(x)$ és la càrrega sobre la directriu, M_0, M_1 són els moments d'extrem de barra i Q_0, Q_1 els tallants d'extrem de barra. Obtingueu les condicions que han de complir aquestes dades per tal que el problema tingui solució.

5. Considerem el problema de contorn en dues dimensions $\Delta\Delta u = f$ a un domini Ω i $u = 0$, $\partial u/\partial n = 0$ a $\partial\Omega$, on Δ és l'operador laplacià i $f \in L^2(\Omega)$. Construïu una formulació variacional d'aquest problema, identifiqueu els espais de funcions apropiats i demostreu que el problema té solució única.

Fonaments d'anàlisi funcional en mecànica de medis continus

PRÀCTICA 3

1. Les equacions de Navier per a un material elàstic lineal es poden escriure de les tres maneres següents:

$$-2\mu\nabla\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))-\lambda\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=\rho\boldsymbol{b}$$
$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}-(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=\rho\boldsymbol{b}$$
$$\mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})-(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=\rho\boldsymbol{b}$$

on $\boldsymbol{u}$ és el camp de desplaçaments, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ la part simètrica de $\nabla\boldsymbol{u}$, λ i μ els coeficients de Lamé, ρ la densitat del material i $\boldsymbol{b}$ el camp de forces màssiques. Suposem que $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ en una part del contorn del domini Ω que ocupa el sòlid. Plantegeu la forma feble de les tres equacions anteriors en els espais de funcions adequats, discutiu quines són les condicions de contorn naturals associades i enuncieu i demostreu teoremes d'existència i unicitat de solució per a cada cas.

2. El problema per obtenir la deformació d'una membrana situada sobre un sòl que es comporta com un material de Winkler es pot escriure de la forma

$$\begin{aligned}
\Delta u-\alpha u+f&=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} && \text{a } \Omega,\ t>0\\
u&=g && \text{a } \Gamma_1,\ t>0\\
\frac{\partial u}{\partial n}&=h && \text{a } \Gamma_2,\ t>0\\
u&=u_0 && \text{a } \Omega,\ t=0\\
\frac{\partial u}{\partial t}&=v_0 && \text{a } \Omega,\ t=0
\end{aligned}$$

on Ω és el domini del problema, Γ_1 i Γ_2 formen una partició de $\partial\Omega$, $\alpha>0$ és una constant, u és la funció incògnita i $f,\ g,\ h,\ u_0$ i v_0 són funcions donades. Plantegeu aquest problema com un problema d'evolució abstracte $\dot{x}+Ax=F$ a l'espai de funcions adequat. Demostreu també que l'operador A associat al problema genera un semigrup quasi-contractiu en aquest espai (Indicació: feu servir el teorema 3.1 del capítol 6 del llibre *Mathematical Foundations of Elasticity*, de J.E. Marsden i T.J.R. Hughes).

3. Llegiu i comenteu la secció 6.4 del llibre *Mathematical Foundations of Elasticity*, de J.E. Marsden i T.J.R. Hughes. En particular, comenteu quines restriccions tenen els resultats principals que s'hi enuncien (des del punt de vista pràctic) i poseu exemples que no s'ajustin a les hipòtesis dels teoremes fonamentals. Digueu també quins resultats caldria provar per a completar la teoria bàsica.

Fonaments d'anàlisi funcional en mecànica de medis continus

PRÀCTICA 4

1. Quan les equacions de Navier-Stokes s'escriuen en un sistema rotatori de referència apareixen dos termes addicionals: la força de Coriolis $2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$ i la força centrífuga $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ ($\boldsymbol{\omega}$: velocitat angular del sistema de referència, $\boldsymbol{u}$ velocitat del fluid, $\boldsymbol{r}$: vector de posició). Si es considera que el terme convectiu és petit, el problema que cal estudiar és:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f}, \quad \text{a } \Omega \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} &= 0, \quad \text{a } \Omega \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0}, \quad \text{a } \partial\Omega \end{aligned}$$

on Ω és el domini del problema. Plantegeu la formulació variacional d'aquest problema i enuncieu i demostreu un teorema d'existència i unicitat de solució.

2. En alguns models que consideren la resistència al flux per la porositat del medi s'afegeix a les equacions de Navier-Stokes un terme de la forma $\alpha\boldsymbol{u}$, amb $\alpha > 0$. El problema de contorn que resulta és:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f}, \quad \text{a } \Omega \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} &= 0, \quad \text{a } \Omega \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0}, \quad \text{a } \partial\Omega \end{aligned}$$

Plantegeu la formulació variacional d'aquest problema i demostreu que té solució (Indicació: modifiqueu la demostració del teorema II.1.2 del llibre *Navier-Stokes equations*, de R. Temam).

3. Una de les linealitzacions possibles de les equacions de Navier-Stokes en règim estacionari és la dita del punt fix o de Picard. A cada iteració el problema que cal resoldre és:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{u}_i + (\boldsymbol{u}_{i-1} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_i + \nabla p_i &= \boldsymbol{f}, \quad \text{a } \Omega \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u}_i &= 0, \quad \text{a } \Omega \\ \boldsymbol{u}_i &= \boldsymbol{0}, \quad \text{a } \partial\Omega \end{aligned}$$

on el subíndex és el comptador d'iteracions. Suposem que el procés comença amb l'estimació inicial $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$.

a) Plantegeu la formulació variacional del problema.
b) Demostreu que per a cada i el problema té solució única, independentment del valor de ν.
c) Obtingueu un estimador a priori per a la norma de $\boldsymbol{u}_i$ en termes de $\boldsymbol{f}$ a l'espai de funcions adequat.
d) Demostreu que els iterats $\boldsymbol{u}_i$ convergeixen a la solució del problema si la viscositat ν és prou gran com per garantir-ne unicitat (consulteu el teorema II.1.3 del llibre *Navier-Stokes equations*, de R. Temam).