TEOREMA DE COMPLETACIÓ

DEMOSTRACION. Supongamos lo contrario. Sea $R=\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, donde cada uno de los conjuntos M_n es nunca denso Sea S_0 una bola cerrada de radio 1. Puesto que M_1 no es denso en S_0, ya que es nunca denso, existe una bola cerrada S_1 de radio menor que $\frac{1}{2}$ y tal que $S_1 \subset S_0$ y $S_1 \cap M_1 = \varnothing$. El conjunto M_2 no es denso en S_1 y por eso la bola S_1 contiene una bola cerrada S_2 de radio menor que $\frac{1}{3}$ tal que $S_2 \cap M_2 = \varnothing$, etc. De esta forma obtenemos una sucesión de bolas cerradas $\{S_n\}$, encajadas unas en otras, cuyos radios tienden a cero, siendo, además, $S_n \cap M_n = \varnothing$. En virtud del teorema 1 del punto anterior, la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ contiene un punto x. De acuerdo con el procedimiento seguido, este punto no puede pertenecer a ninguno de los conjuntos M_n y, por consiguiente, $x \overline{\in} \bigcup_n M_n$, es decir, $R \neq \bigcup_n M_n$, lo que está en contradicción con la suposición hecha.

En particular, *todo espacio métrico completo sin puntos aislados es innumerable.* En efecto, en este espacio todo punto es nunca denso.

4°. Completación de un espacio. Si el espacio R no es completo, siempre puede ser incluido de cierta manera (y de hecho de una manera única) en un espacio completo.

DEFINICION 2. Sea R un espacio métrico. Un espacio métrico completo R^* se llama *completación* del espacio R, si:

1) R es un subespacio del espacio R^*;

2) R es siempre denso en R^*, es decir, $[R]=R^*$. (Aquí $[R]$ significa, claro está, la adherencia del espacio R en R^*).

Por ejemplo, el espacio de todos los números reales es completación del espacio de los números racionales.

TEOREMA 2. *Todo espacio métrico R posee una completación y esta completación es única, a menos de una aplicación isométrica que transforma los puntos de R en sí mismos.*

DEMOSTRACION. Comencemos por la *unicidad*. Debemos comprobar que si R^* y R^{**} son dos completaciones del espacio R, existe una aplicación biunívoca φ del espacio R^* sobre R^{**} tal que

1) $\varphi(x)=x$ para todo $x \in R$;

2) si $x^* \leftrightarrow x^{**}$ e $y^* \leftrightarrow y^{**}$, entonces $\rho_1(x^*, y^*)=\rho_2(x^{**}, y^{**})$, donde ρ_1 es la distancia en R^* y ρ_2, la distancia en R^{**}.

La aplicación φ se construye del siguiente modo. Sea x^* un punto arbitrario de R^*. En este caso, de acuerdo con la definición de completación, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de R que converge a x^*. Los puntos $\{x_n\}$ pertenecen también a R^{**}. Puesto que R^{**} es completo, $\{x_n\}$ converge en R^{**} a un punto x^{**}. Está claro que x^{**} no depende de cómo se escoge la sucesión $\{x_n\}$, convergente al punto x^*. Tomemos $\varphi(x^*)=x^{**}$. La aplicación φ es la aplicación isométrica que necesitamos.

En efecto, está claro que $\varphi(x)=x$ para todo $x \in R$. Además, supongamos que

$$\{x_n\} \longrightarrow x^* \text{ en } R^* \text{ y } \{x_n\} \longrightarrow x^{**} \text{ en } R^{**},$$
$$\{y_n\} \longrightarrow y^* \text{ en } R^* \text{ y } \{y_n\} \longrightarrow y^{**} \text{ en } R^{**};$$

entonces,

$$\rho_1(x^*, y^*)=\lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, y_n)=\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

y al mismo tiempo

$$\rho_2(x^{**}, y^{**})=\lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n, y_n)=\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Por consiguiente,

$$\rho_1(x^*, y^*)=\rho_2(x^{**}, y^{**}).$$

Demostremos ahora la *existencia* de la completación. La idea de esta demostración es la misma que en la teoría de Cantor de los números reales. La situación ahora es incluso más simple que en la teoría de los números reales, ya que allí era necesario, además, definir todas las operaciones aritméticas para los antes nuevos introducidos, es decir, para los números irracionales.

Sea R un espacio métrico arbitrario. Dos sucesiones fundamentales $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ de R se llamarán equivalentes (denotación $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$), cuando $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n)=0$. Esta relación de equivalencia es reflexiva, simétrica y transitiva. De aquí se desprende que todas las sucesiones fundamentales, que pueden formarse por medio de los puntos del espacio R, se dividen en clases de sucesiones equivalentes entre sí. Definamos ahora el espacio R^* del siguiente modo. Tomemos como puntos de este espacio todas las clases de sucesiones equivalentes entre sí y determinemos la distancia entre ellos como sigue. Sean x^* e y^* dos de estas clases. Escojamos en cada una de estas clases un representante, es decir, una sucesión fundamental $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Pongamos

$$\rho(x^*, y^*)=\lim_{n\to\infty} (\rho(x_n, y_n). \tag{3}$$

Demostremos que es correcto definir así la distancia, es decir, que el límite (3) existe y no depende de cómo se escogen los representantes $\{x_n\} \in x^*$ e $\{y_n\} \in y^*$.

Puesto que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son fundamentales, obtenemos, por medio del axioma triangular, que para todos n y m suficientemente grandes

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| = \\ = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n y_m) + \rho(x_n, y_m) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \\ \leqslant |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_m)| + |\rho(x_n, y_m) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \\ \leqslant \rho(y_n, y_m) + \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (4)$$

Por consiguiente, la sucesión de números reales $s_n = \rho(x_n, y_n)$ verifica el criterio de Cauchy y, por lo tanto, tiene un límite. Este límite no depende de la selección de $\{x_n\} \in x^*$ e $\{y_n\} \in y^*$. En efecto, sea

$$\{x_n\}, \{x'_n\} \in x^* \text{ e } \{y_n\}, \{y'_n\} \in y^*.$$

Obtenemos por un razonamiento, análogo a (4),

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n).$$

Puesto que $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ e $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$, de aquí se sigue que

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Demostremos ahora que R^* se cumplen los axiomas de espacio métrico.

El axioma 1 se desprende inmediatamente de la definición de equivalencia de sucesiones fundamentales.

El axioma 2 es obvio.

Comprobemos ahora el axioma triangular. En el espacio inicial R este axioma se cumple y por eso

$$\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Pasando al límite para $n \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, z_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n \to \infty} \rho(y_n, z_n),$$

es decir,

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Demostremos ahora que R^* es una completación del espacio R.

A cada punto $x \in R$ le corresponde una clase de sucesiones fundamentales equivalentes entre sí, a saber, la totalidad de las

sucesiones convergentes al punto x. Además, si

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \text{ e } y = \lim_{n \to \infty} y_n, \text{ tenemos } \rho(x, y) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n).$$

Por consiguiente, obtendremos una aplicación isométrica de R en el espacio R^*, si a todo punto $x \in R$ le ponemos en correspondencias la clase de sucesiones fundamentales convergentes a x.

En adelante podemos identificar el espacio R con su imagen en R^* y considerar R como un subconjunto de R^*.

Demostremos ahora que R es siempre denso en R^*. En efecto, sean x^* un punto de R^* y $\varepsilon > 0$ un número arbitrario. Tomemos en x^* un representante, esto es, una sucesión fundamental $\{x_n\}$. Sea N tal que $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m > N$. En este caso

$$\rho(x_n, x^*) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$$

para $n \geqslant N$, es decir, una vecindad arbitraria del punto x^* contiene un punto de R. Por consiguiente, la adherencia de R en R^* es todo el espacio R^*.

Resta demostrar que el espacio R^* es completo. Observemos, ante todo, que R^* ha sido construido de manera que toda sucesión fundamental

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \quad (5)$$

compuesta de puntos pertenecientes a R, converge en R^* a un punto determinado, a saber, al punto $x^* \in R^*$ determinado por la sucesión (5). Además, puesto que R es denso en R^*, para toda sucesión fundamental $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots$ de puntos de R^* se puede construir una sucesión equivalente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, compuesta de puntos, pertenecientes a R. Para ello es suficiente escoger a título de x_n cualquier punto de R tal que $\rho(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}$.

La sucesión $\{x_n\}$ así obtenida es fundamental y, de acuerdo con lo demostrado, converge a un punto $x^* \in R^*$. Pero esto significa que la sucesión $\{x_n^*\}$ también converge a x^*. El teorema queda demostrado completamente.

§. 4 PRINCIPIO DE APLIGACIONES CONTRAÍDAS Y SUS APLIGACIONES

1°. Principio de aplicaciones contraídas. A título de aplicación del concepto de complitud consideremos el así llamado *principio de aplicaciones contraídas*. Representa un instrumento útil para la demostración de diferentes teoremas de existencia y unicidad (por ejemplo, en la teoría de ecuaciones diferenciales).