una de estas bolas, llamémosla B_1, contiene una subsucesion (sucesión parcial) infinita $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ de la sucesión $\{x_n\}$. Escojamos ahora en B_1 una 1/2-red y construyamos alrededor de todo punto de esta red una bola cerrada de radio 1/2. Al menos una de estas bolas, llamémosla B_2, contiene una subsucesión infinita $x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$ de la sucesión $\{x_n^{(1)}\}$. Busquemos luego una bola cerrada B_3 de radio 1/4 y centro en B_2 que contiene una subsucesión infinita $x_1^{(3)}, \ldots, x_n^{(3)}, \ldots$ de la sucesión $\{x_n^{(2)}\}$, etc. Consideremos con toda bola B_n una bola cerrada A_n con centro en el mismo punto, pero de un radio dos veces mayor. Es fácil ver que las bolas A_n están encajadas unas en otras. Debido a la complitud del espacio R, la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es no vacía y consta de un sólo punto x_0. Este punto es un punto de acumulación de la sucesión inicial $\{x_n\}$, ya que toda vecindad suya contiene una bola B_k y, por consiguiente, una subsucesión infinita $\{x_n^{(k)}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$.

3°. Compacidad relativa de subconjuntos en un espacio métrico. El concepto de compacidad relativa, introducido en el parágrafo anterior para subconjuntos de un espacio topológico arbitrario, es aplicable, en particular, a los subconjuntos de un espacio métrico. Es evidente, además, que el concepto de compacidad relativa coincide en este caso con el concepto de compacidad numerable relativa. Destaquemos el siguiente resultado simple, pero importante.

TEOREMA 3. *Para que un conjunto M de un espacio métrico completo R sea relativamente compacto, es necesario y suficiente que sea totalmente acotado.*

La demostración se obtiene inmediatamente del teorema 2 y del hecho evidente de que todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es también completo.

La importancia de este teorema estriba en que, como regla general, resulta más fácil establecer la acotación total de uno u otro conjunto, que demostrar directamente su compacidad relativa. Al mismo tiempo, para las aplicaciones del Análisis tiene importancia precisamente la compacidad.

Observación. Al demostrar la acotación total de uno u otro conjunto M (es decir, al construir en él una ε-red finita para todo $\varepsilon > 0$) de un espacio métrico R, no es necesario que esta ε-red pertenezca a M. Es suficiente que esta ε-red finita pueda ser construida mediante puntos, pertenecientes a R. En efecto,

ANNEX 2 Teorema d'Arzelà.

si los puntos

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$$

son tales que para todo punto x

$$\rho(x, a_k) \leqslant \varepsilon$$

para cierto k, obtendremos una 2ε-red en el conjunto M, compuesta por puntos de este conjunto, al sustituir todo punto a_k mediante un punto b_k que verifique las condiciones

$$\rho(a_k, b_k) \leqslant \varepsilon, \quad b_k \in M.$$

4°. Teorema de Arzelá. La demostración de la compacidad de un conjunto de un espacio métrico, es un problema que encontramos con bastante frecuencia en el Análisis. Al mismo tiempo, la aplicación directa del teorema 2 del punto 2 no siempre resulta simple. Para los conjuntos, situados en un espacio concreto, se puede dar criterios especiales de compacidad, que resultan más cómodos para la aplicación práctica.

En un espacio euclídeo de n dimensiones la compacidad de un conjunto es equivalente, como hemos visto, a su acotación. Sin embargo, esto ya no es cierto para espacios métricos más generales.

En el Análisis, uno de los espacios métricos más importantes es el espacio $C_{[a, b]}$. Para los subconjuntos de este espacio, un criterio importante y frecuentemente empleado de compacidad relativa lo ofrece el así llamado teorema de Arzelá.

Para poder enunciarlo, necesitamos los siguientes conceptos.

Una familia Φ de funciones φ, definidas sobre un segmento, se llama *equiacotada*, cuando existe un número K tal que

$$|\varphi(x)| < K$$

para todo $x \in [a, b]$ y toda $\varphi \in \Phi$.

Una familia $\Phi = \{\varphi\}$ se llama *equicontinua*, cuando para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$$

para todas las funciones $\varphi \in \Phi$ y para todo par x_1, x_2 de $[a, b]$ tal que $\rho(x_1, x_2) < \delta$.

TEOREMA 4 (ARZELÁ). *Para que una familia Φ de funciones continuas, definidas sobre el segmento $[a, b]$, sea relativamente compacta en $C_{[a, b]}$, es necesario y suficiente que esta familia sea equiacotada y equicontinua.*

DEMOSTRACION. NECESIDAD. Sea la familia Φ relativamente compacta en $C_{[a, b]}$. Entonces, de acuerdo con el teorema 3 del punto anterior, para cada ε positivo existe en Φ una $\frac{\varepsilon}{3}$-red finita $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. Cada una de las funciones φ_i, siendo continua sobre un segmento, es acotada:

$$|\varphi_i(x)| \leqslant K_i.$$

Pongamos $K = \max K_i + \frac{\varepsilon}{3}$. Por definición de $\frac{\varepsilon}{3}$-red, para todo $\varphi \in \Phi$ tenemos, al menos para un φ_i,

$$\rho(\varphi_1, \varphi_i) = \max_x |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por consiguiente,

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K.$$

Es decir, Φ es una familia equiacotada.

Luego, puesto que cada una de las funciones φ_i que forman la $\frac{\varepsilon}{3}$-red es continua y, por consiguiente, uniformemente continua sobre $[a, b]$, para un $\frac{\varepsilon}{3}$ dado existe un δ_i tal que

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

siempre que $|x_1 - x_2| < \delta_i$.

Sea $\delta = \min \delta_i$. Entonces, para $|x_1 - x_2| < \delta$ y para cualquier función $\varphi \in \Phi$, tomando φ_i de manera que $\rho(\varphi, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$, obtenemos

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Hemos demostrado con ello la equicontinuidad de la familia Φ.

SUFICIENCIA. Sea Φ una familia equiacotada y equicontinua de funciones. De acuerdo con el teorema 3, para demostrar su compacidad relativa en $C_{[a, b]}$, es suficiente probar que existe en $C_{[a, b]}$ una ε-red finita de ella cualquiera que sea $\varepsilon > 0$. Sea

$$|\varphi(x)| \leqslant K \text{ para todos } \varphi \in \Phi$$

y sea $\delta > 0$ escogido de manera que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{5} \text{ para } |x_1 - x_2| < \delta$$

y para todos $\varphi \in \Phi$. Dividamos el segmento $[a, b]$ del eje x mediante los puntos $x_0 = a_1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ en intervalos de longitud menor que δ y construyamos rectas verticales a través de estos puntos. Dividamos el segmento $[-K, K]$ del eje y mediante los puntos $y_0 = -K < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = K$ en intervalos de longitud $< \frac{\varepsilon}{5}$ y construyamos rectas horizontales a través de estos puntos. De esta forma el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $-K \leqslant y \leqslant K$ resultará dividido en células con lado horizontal de longitud $< \delta$ y con lado vertical de longitud $< \frac{\varepsilon}{5}$. Asignemos ahora a cada función $\varphi \in \Phi$ la quebrada $\psi(x)$ con vértices en los puntos (x_k, y_l), es decir, en los nodos de la red construida, y que diverge de la función $\varphi(x)$ en los puntos x_k en menos que $\frac{\varepsilon}{5}$ (la existencia de una quebrada de este tipo es evidente).

Puesto que, por la construcción,

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{5},$$
$$|\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

y

$$|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5},$$

tenemos

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Puesto que la función $\psi(x)$ es lineal entre los puntos x_k y x_{k+1}, tenemos

$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \frac{3\varepsilon}{5} \text{ para todos } x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Sea ahora x un punto arbitrario del segmento $[a, b]$ y sea x_k el punto de la división escogida más próximo a x por la izquierda. Entonces

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| +$$
$$+ |\psi(x_k) - \psi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Por consiguiente, las quebradas $\psi(x)$ representan una ε-red respecto a Φ. El número de ellas es finito; luego, Φ es totalmente acotada. Hemos demostrado completamente el teorema.

5°. Teorema de Peano. El teorema de Arzelá tiene múltiples aplicaciones. A título de aplicación suyo veamos el siguiente teorema de existencia para ecuaciones diferenciales ordinarias con el miembro derecho continuo.

TEOREMA 5 (Peano). *Sea*

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \qquad (3)$$

una ecuación diferencial dada. Si la función f es continua en un recinto cerrado G, al menos una curva integral de la ecuación dada pasa por cada punto interior (x_0, y_0) de este recinto.

DEMOSTRACION. Puesto que la función f es continua en un recinto cerrado, es acotada:

$$|f(x, y)|<M=\text{const.}$$

Tracemos por el punto (x_0, y_0) las rectas con pendiente M y $-M$. Tracemos, además, las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ de manera que los dos triángulos con vértice común en (x_0, y_0) que ellas producen pertenezcan íntegramente al interior de la región G.

Construyamos ahora para la ecuación dada las así llamadas quebradas de Euler del siguiente modo: tracemos por el punto (x_0, y_0) la recta de pendiente $f(x_0, y_0)$. Tomemos en esta recta un punto (x_1, y_1) y tracemos, a través de él, una recta de pendiente $f(x_1, y_1)$. En esta recta tomemos un punto (x_2, y_2) y tracemos, a través de él, una recta de pendiente $f(x_2, y_2)$, etc. Consideremos ahora la sucesión de quebradas de Euler $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, que pasan por el punto (x_0, y_0) y tales que la longitud del mayor de los eslabones de la línea L_k tiende a cero para $k \to \infty$. Sea φ_k la función, cuya gráfica es la línea L_k. Las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ poseen las siguientes propiedades:

1) están definidas en un mismo segmento $[a, b]$,
2) son equiacotadas,
3) son equicontinuas.

En virtud del teorema de Arzelá, se puede extraer de la sucesión $\{\varphi_k\}$ una subsucesión uniformemente convergente. Sea $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(k)}, \ldots$ esta sucesión.

Pongamos $\varphi(x)=\lim \varphi^{(k)}(x)$ para $k \to \infty$. Está claro que $\varphi(x_0)=y_0$. Resta probar que φ verifica sobre el segmento $[a, b]$ la ecuación diferencial dada. Para ello es necesario demostrar que cualquiera que sea $\varepsilon>0$

$$\left|\frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}-f(x', \varphi(x'))\right|<\varepsilon,$$

siempre que la magnitud $|x''-x'|$ sea suficientemente pequeña. A su vez, para demostrar esto es preciso establecer para k suficientemente grande

$$\left|\frac{\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')}{x''-x'}-f(x', \varphi^{(k)}(x'))\right|<\varepsilon,$$

siempre que la diferencia $|x''-x'|$ sea suficientemente pequeña.

Puesto que f es continua en la región G, para cualquier $\varepsilon>0$ se puede encontrar un $\eta>0$ tal que

$$f(x', y')-\varepsilon<f(x, y)<f(x', y')+\varepsilon$$
$$(y'=\varphi(x')),$$

siempre que

$$|x-x'|<2\eta \quad \text{e} \quad |y-y'|<4M\eta.$$

El conjunto de puntos $(x, y) \in G$, que verifican estas dos desigualdades, constituye un rectángulo Q. Sea ahora K tan grande que para todo $k>K$

$$|\varphi(x)-\varphi^{(k)}(x)|<4\eta$$

y todos los eslabones de la quebrada L_k tienen longitud menor que η. Entonces, si $|x-x'|<2\eta$, todas las quebradas de Euler $\varphi^{(k)}$, correspondientes a $k>K$, se encuentran íntegramente en el interior de Q.

Además, sean $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \ldots, (a_{n+1}, b_{n+1})$ los vértices de la quebrada $\varphi^{(k)}$, donde

$$a_0 \leqslant x'<a_1<a_2<\ldots<a_n<x'' \leqslant a_{n+1}$$

(suponemos, para concretar, que $x''>x'$; el caso $x''<x'$ se considera análo gamente). Entonces,

$$\varphi^{(k)}(a_1)-\varphi^{(k)}(x')=f(a_0, b_0)(a_1-x'),$$
$$\varphi^{(k)}(a_{i+1})-\varphi^{(k)}(a_i)=f(a_i, b_i)(a_{i+1}-a_i); \quad i=1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(a_n)=f(a_n, b_n)(x''-a_n).$$

De aquí, para $|x''-x'|<\eta$, obtenemos

$$[f(x', y')-\varepsilon](a_1-x')<\varphi^{(k)}(a_1)-\varphi^{(k)}(x')<[f(x', y')+\varepsilon](a_1-x'),$$
$$f(x', y')-\varepsilon](a_{i+1}-a_i)<\varphi^{(k)}(a_{i+1})-\varphi^{(k)}(a_i)<$$
$$<[f(x', y')+\varepsilon](a_{i+1}-a_i); \quad i=1, \ldots, n-1,$$
$$[f(x', y')-\varepsilon](x''-a_n)<\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(a_n)<[f(x', y')+\varepsilon](x''-a_n).$$

Sumando estas desigualdades, encontramos

$$[[f(x', y')-\varepsilon](x''-x')<\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')<[f(x', y')+\varepsilon](x''-x'),$$

que es lo que queríamos demostrar.

Diferentes subsucesiones de la sucesión de quebradas de Euler pueden converger a diferentes soluciones de la ecuación (3). Por eso, la solución φ que hemos obtenido no es, en general, la única solución de la ecuación $y'=f(x, y)$ que pasa por el punto (x_0, y_0).

6. Teorema generalizado de Arzelá. Sean X e Y dos compactos métricos y sea C_{XY} el conjunto de todas las aplicaciones continuas f del compacto X en Y. Definamos la distancia en C_{XY} mediante la fórmula

$$\rho(f, g)=\sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)).$$

Es fácil comprobar que C_{XY} se convierte de esta forma en un espacio métrico.

TEOREMA 6 (teorema generalizado de Arzelá). *Para que un conjunto $D \subset C_{XY}$ sea relativamente compacto, es necesario y suficiente que las funciones f que integran D sean equicontinuas, es decir, que para cualquier $\varepsilon>0$ exista un $\delta>0$ tal que de*

$$\rho(x', x'')<\delta \qquad (4)$$

se deduzca

$$\rho(f(x'), f(x''))<\varepsilon \qquad (5)$$

cualesquiera que sean f de D y x' y x'' de X.

DEMOSTRACION. La necesidad se demuestra igual que en el teorema 4.