1. ESPAIS DE SOBOLEV (NOCIONS INTUÏTIVES)

1.1. ESPAIS $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$

Sempre considerarem que Ω és un domini acotat de $\mathbb{R}^n$ i que les funcions definides sobre Ω que estudiem són reals. Sigui doncs $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Definim:

Per a $1 \le p < \infty$: $$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\Omega \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

Per a $p = \infty$: $$\|f\|_\infty \equiv \|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \qquad (2)$$

Tant (1) com (2) són imprecises. A (1), $\int_\Omega$ s'ha d'entendre com a una integral de Lebesgue i a (2) no s'ha de prendre el suprem, sinó el suprem essencial. De moment deixem-ho així.

Definim també

$$L^p(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|f\|_p < \infty \} , \quad 1 \le p \le \infty \qquad (3)$$

Veurem que $\|\cdot\|_p$ és una norma sobre $L^p(\Omega)$ que dota aquest espai d'estructura d'espai de Banach.

Per a dominis acotats com els que considerem es té que

$$L^\infty(\Omega) \subset \dots \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$$

Exemple. Sigui $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ i $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Tenim:

$$\|f\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 \quad \Rightarrow \quad f \in L^1(0,1)$$

$$\|f\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty \quad \Rightarrow \quad f \notin L^2(0,1)$$

$$\sup_{x\in(0,1)} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad f \notin L^\infty(0,1).$$

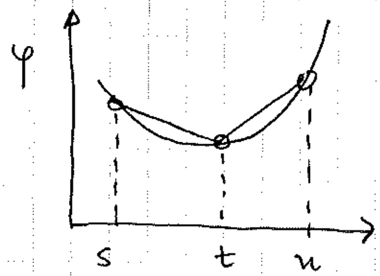
Teorema (desigualtat de Jensen). Si $f \in L^1(\Omega)$ i $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és convexa, llavors:

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (\varphi\circ f)\,d\Omega \geq \varphi\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,d\Omega\right)$$

(Notació: $|\Omega| \equiv \text{meas}(\Omega) = \int_\Omega d\Omega$)

Dem. Si φ és convexa: $\left(\varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2)\right)$

$$\beta := \sup_{s<t} \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \quad \forall\, u>t$$



$$\beta \geq \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \quad \forall s<t \Rightarrow \varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s-t) \;\forall s<t$$

$$\beta \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \quad \forall u>t \Rightarrow \varphi(u) \geq \varphi(t) + \beta(u-t) \;\forall u>t$$

$$\therefore \quad \varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s-t) \quad \forall s \quad (\beta = \beta(t))$$

Siguin $s = f(x)$ $(x\in\Omega)$, $t = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,d\Omega$. Llavors:

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,d\Omega\right) + \beta\left(f(x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,d\Omega\right)$$

$$\int_\Omega (\varphi\circ f)\,d\Omega \geq |\Omega|\,\varphi\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,d\Omega\right) + \beta\Big(\underbrace{\int_\Omega f\,d\Omega - \int_\Omega f\,d\Omega}_{0}\Big)$$

$\square$

Teorema (desigualtat de Minkowski). Si $f, g \in L^p(\Omega)$, llavors
$$\| |f| + |g| \|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \qquad (5)$$

Dem. $p = \infty$ és trivial. Suposem $1 \leq p < \infty$ i $f, g \geq 0$. Sigui q el conjugat de p. Si $f \in L^p(\Omega)$, llavors $f^{p-1} \in L^q(\Omega)$ i la desigualtat de Hölder proporciona:

perquè $(p-1)q = p$

$$\|f+g\|^p_{L^p(\Omega)} = \|(f+g)^p\|_{L^1(\Omega)} = \|f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}\|_{L^1(\Omega)}$$
$$\leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|(f+g)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \|(f+g)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}$$

Hi ha integral (a.e., [illegible]) i que podem fer servir aquest pas

$$\leq \left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}\right) \|f+g\|^{\frac{p}{q}}_{L^p(\Omega)} \qquad \square$$

Obs. La desigualtat de Minkowski és el pas complicat per veure que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ és una norma a $L^p(\Omega)$.

1.2. ESPAIS DE SOBOLEV.

Notació:
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \quad \text{(multiíndex)}$$
$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Per a $m = 1, 2, \ldots$, $p \geq 1$, definim:
$$\|f\|_{m,p} \equiv \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=0}^{m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \qquad (6)$$

Def.
$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty \right\} \qquad (7)$$

Obs.: $W^{0,p}(\Omega) \equiv L^p(\Omega)$

Notació: $W^{m,2} \equiv H^m(\Omega)$

Definició. $p, q \in (1, \infty)$ s'anomenen exponents conjugats si
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
L'exponent conjugat de $p = 1$ és $q = \infty$. ☐

Teorema. Siguin p, q conjugats.
$$f \in L^p(\Omega), \quad g \in L^q(\Omega) \Rightarrow fg \in L^1(\Omega) \text{ i es compleix:}$$
$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \qquad (4)$$
(desigualtat de Hölder, per a $p = q = 2$ s dim des. de Schwarz)

Dem. a) $p = 1$, $q = \infty$. Trivial.

b) $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$. Suposem $f \neq 0$, $g \neq 0$ (altrament trivial) i siguin
$$F := \frac{|f|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}, \quad G := \frac{|g|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}.$$
Vegem que si $a, b > 0$ i p, q són conjugat $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$:
$$ab = \exp\left(\frac{1}{p}\log a^p\right)\exp\left(\frac{1}{q}\log b^q\right)$$
$$= \exp\left[\frac{1}{p}\log a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\log b^q\right]$$
$$\leq \frac{1}{p}\exp\log a^p + \frac{1}{q}\exp\log b^q = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q \quad (\exp \text{ convexa})$$
Per tant:
$$\frac{\|fg\|_{L^1(\Omega)}}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \int_\Omega FG \, d\Omega \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{p}F^p + \frac{1}{q}G^q\right)$$
$$= \int_\Omega \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\int_\Omega |f|^p} + \int_\Omega \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\int_\Omega |g|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad ☐$$

Full d'examen núm.

☐ Enginyeria de Camins
☐ Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques
☐ Enginyeria Geològica

Assignatura

Alumne — Núm. Matrícula

Curs — Grup — Data

La definició (6)-(7) no és del tot correcta. A banda de la imprecisió que tenim en la definició de $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, les derivades que apareixen a (6) cal entendre-les en el sentit feble o distribucional.

<u>Def</u>. $H_0^m(\Omega) = \{ f \in H^m(\Omega) \mid D_n^{|\alpha|} f \,|_{\partial\Omega} = 0, \; 0 \le |\alpha| \le m-1 \}$ $\square$

Fins i tot en sentit clàssic, aquesta definició ja té problemes. Què vol dir avaluar derivades en el contorn?. El th. de traça ho explica.

És fàcil veure que (per Ω acotat)

$$\ldots \subset W^{3,p}(\Omega) \subset W^{2,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset W^{0,p}(\Omega) \equiv L^p(\Omega)$$

$$W^{m,\infty}(\Omega) \subset \ldots \subset W^{m,2}(\Omega) \subset W^{m,1}(\Omega)$$

Però, què passa si variem m i p? El th. d'immersió de Sobolev dóna una resposta parcial (però "òptima").

<u>Exemple</u>. Vegem que $H_0^1(\Omega)$ és l'espai "natural" del problema

$$-\Delta u = f, \quad f \in L^2(\Omega) \quad \text{a } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{a } \partial\Omega$$

Sigui V l'espai on es troba u. Multiplicant l'EDP per una $v \in V$ i integrant per parts:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u = \int_\Omega v f \tag{8}$$

Si $u \in V$ i $v \in V$, vegem que (8) té sentit si, i només si, $V = H_0^1(\Omega)$.

Necessitat. Prenem $v = u$. $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u$ ha de ser finita. Cal que $u \in H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega)$.

Suficiència. $\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \leq \int_\Omega |\nabla v| |\nabla u| = \| |\nabla v| |\nabla u| \|_{L^1(\Omega)}$

$\leq \| |\nabla v| \|_{L^2(\Omega)} \| |\nabla u| \|_{L^2(\Omega)}$ (Schwarz) $< \infty$.

$\int_\Omega f v \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ □

A l'exemple anterior hem demanat $f \in L^2(\Omega)$. Això exclou molts casos d'interès (per exemple "càrregues puntuals", és a dir, deltes de Dirac). Podem demanar menys regularitat? La resposta és que sí, però per això cal introduir el concepte d'espai dual i, en particular, estudiar la dualitat en espais de Sobolev.

Teorema (desigualtat de Poincaré-Friedrichs). Si $f \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 \geq C \left(\int_\Omega |\nabla f|^2 + \int_\Omega f^2 \right) \qquad (C>0)$$

és a dir,

$$\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|f\|_{H^1(\Omega)}$$

Dem. És suficient veure que $\int_\Omega |\nabla f|^2 \geq C \int_\Omega f^2$. Provem-ho per a $n=1$, $\Omega = (a,b)$:

$$f(x) = \int_a^x f'(\xi)\, d\xi \leq \left[\int_a^x 1^2 d\xi \int_a^b f'(\xi)^2 d\xi \right]^{1/2} = \sqrt{x-a}\, \|f'\|_{L^2(a,b)}$$

$$\int_a^b f^2(x)\, dx \leq \left(\int_a^b (x-a)\, dx \right) \|f'\|^2_{L^2(a,b)}$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b f'(x)^2 dx$$

(Exercici: Generalitzar-ho) □

3. ESPAIS MÈTRICS.

3.1. DEFINICIONS BÀSIQUES.

Definició. Una aplicació $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ és una mètrica si:

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (si només és $\Leftarrow$ es diu pseudo-mètrica)

2) $d(x,y) + d(x,z) \geq d(y,z)$ (desigualtat triangular) □

Complint-se 1) i 2) és fàcil veure que $d(x,y) = d(y,x)$ i que $d(x,y) \geq 0$, $x, y, z \in X$.

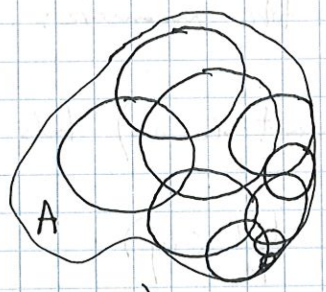
Topologia mètrica. Definim la bola de centre $x_0 \in X$ i radi $r > 0$ com:

$$B_r(x_0) := \{ x \in X \mid d(x, x_0) < r \}$$

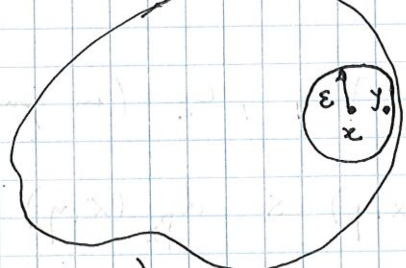
Per definir una topologia a X cal determinar només quins són els conjunts oberts (i veure que en efecte tenim una topologia). Ho podem fer de dues maneres (equivalents).

1) $A \subset X$ és obert $\Leftrightarrow \exists \{r_j\}, \{x_k\} \mid A = \bigcup_{j,k} B_{r_j}(x_k)$

2) $A \subset X$ és obert $\Leftrightarrow \forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0 \mid y \in X \ \& \ d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow y \in A$



1)



2)

La demostració 1) $\Leftrightarrow$ 2) és purament tècnica.

Definició. Sigui $\mathcal{D}$ la topologia definida anteriorment. $(X, \mathcal{D})$ s'anomena espai mètric.

Convergència

Sigui $\{x_k\}$ una successió en un espai mètric X. Diem que x_k convergeix a $x^* \in X$ (escrit $\lim x_n = x^*$) si

1) $\forall A$ obert, $x^* \in A$, $\exists N \mid \forall n > N \quad x_n \in A$

o bé 2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \mid \quad d(x_n, x^*) < \varepsilon \quad \forall n > N$

Teorema i) 1) i 2) són equivalents.

ii) Si $\{x_k\}$ convergeix, el límit és únic.

Demostració. i) Per 1) $\Rightarrow$ 2) prendre $A = B_\varepsilon(x^*)$. Per 2) $\Rightarrow$ 1) sigui $A = \bigcup_{j,k} B_{r_j}(x_k)$ i sigui $B_{r_0}(x_0)$ la bola tal que $x^* \in B_{r_0}(x_0)$. Prendre $\varepsilon = \underset{y \in B_{r_0}(x_0)}{\cancel{\sup}\ \inf} d(x^*, y)$.

ii) Si $\{x_n\}$ convergeix a x^* i a y^* i $x^* \neq y^*$ prenem $A_1 = B_\varepsilon(x^*)$, $A_2 = B_\varepsilon(y^*)$, amb $\varepsilon = d(x^*, y^*)/3$. $\square$

EXEMPLES. Sigui $X = \mathbb{R}^n$ i definim:

$$d_p(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^p \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$d_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

$d_p(x,y)$ són mètriques per a $1 \leq p \leq \infty$ (exercici: demostrar la desigualtat de Hölder i de Minkowski). De tota manera:

$\forall p_1, p_2 \in [1, \infty]$ $\exists c_1, c_2$ (en general depenent de n) tals que

$$c_1 \, d_{p_1}(x,y) \leq d_{p_2}(x,y) \leq c_2 \, d_{p_1}(x,y). \qquad (1).$$

Per exemple:

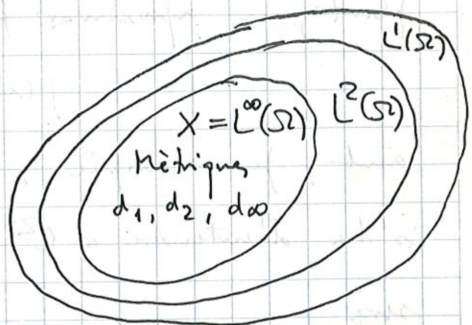
$$\max_i |x_i - y_i| \leq \sum_i |x_i - y_i| \leq n \max_i |x_i - y_i|$$

$$\max_i |x_i - y_i| \leq \left(\sum_i (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \max_i |x_i - y_i|$$

La desigualtat (1) és fonamental. Indica que TOTES LES MÈTRIQUES A $\mathbb{R}^n$ GENEREN LA MATEIXA TOPOLOGIA (tenen els mateixos oberts). Per tant, es convergeix en una distància si, i només si, es convergeix en una altra. Això passa sempre en espais de dimensió finita.

Considerem ara els espais $L^p(\Omega)$ i la mètrica

$$d_p(x, y) = \| x - y \|_{L^p(\Omega)}$$



Suposem que $x, y \in L^\infty(\Omega) = X$.

Tenim:

$$\int_\Omega |x-y| \leq \text{meas}(\Omega) \sup |x-y|$$

$$\left(\int_\Omega |x-y|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{\text{meas}(\Omega)} \sup |x-y|$$

$$\int_\Omega |x-y| \leq \left(\int_\Omega 1^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |x-y|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\text{meas}(\Omega)} \left(\int_\Omega |x-y|^2\right)^{1/2}$$ (Schwarz)

Per tant:

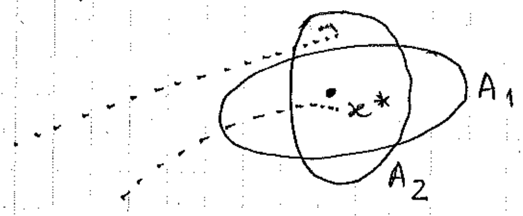
$$d_1(x,y) \leq C\, d_\infty(x,y)$$

$$d_2(x,y) \leq C\, d_\infty(x,y) \qquad (2)$$

$$d_1(x,y) \leq C\, d_2(x,y)$$

Considerem, per exemple (2). Podem dir que:

- Els oberts de (X, d_2) són també oberts de (X, d_∞)
- La topologia generada per (X, d_2) és més feble/grollera que la generada per (X, d_∞)
- Convergència en $d_\infty \Rightarrow$ convergència en d_2. (recíproc NO!)



A_1, A_2 oberts de (X, d_∞)
A_1 obert de (X, d_2)

A nivell pràctic: té molt més valor provar convergència en $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ que no pas en $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ (una altra cosa és quin és l'"ordre" de convergència).

<u>Obs.</u> Comparar $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ i $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$ és més delicat. $L^1(\Omega)$ i $L^\infty(\Omega)$ compleixen $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$. Hi tornarem. $\square$

<u>Exemple</u>. Siguin $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$ i $f(x) \equiv 1$, $x \in X$. Si ens plantegem aproximar f en sèrie de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x)$$

amb, per exemple, $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x)$, la igualtat anterior s'ha d'entendre a L^2, NO a L^∞. En efecte, si $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n \varphi_n(x)$ serà

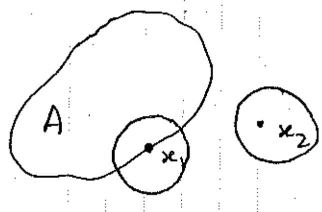
$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_{L^\infty} = 1$$

$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_{L^2} = 0 \qquad \square$$

<u>Definicions.</u> Siguin $A \subset X$, $x \in X$.

1) x és d'acumulació d'A si $\forall B \in \mathcal{D}$, $x \in B$, és
$$A \cap (B \setminus \{x\}) \neq \phi$$

2) x és de frontera d'A si $\forall B \in \mathcal{D}$, $x \in B$ és
$$A^c \cap B \neq \phi \ \& \ A \cap B \neq \phi$$



Continuïtat. Sigui $f : X \longrightarrow Y$, X, Y espais amb mètriques d_X, d_Y.

1) f és contínua a $x \in X$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x)$ tal que

$$y \in B_\delta(x) \Rightarrow f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$$

2) f és uniformement contínua a $A \subset X$ si f és contínua $\forall x \in A$ i $\delta = \delta(\varepsilon)$.

3) $f \in Lip_\alpha(A)$ $(\alpha > 0, A \subset X)$ si $\forall x, y \in A \ \exists C > 0$ |

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C \, d_X^\alpha(x, y).$$

(Notació: $Lip_1 \equiv Lip$). $\square$

Teorema. 1) La definició 1) anterior coincideix amb la de continuïtat a l'espai topològic $(X, \mathcal{D})$.

2) $f \in Lip(A) \Rightarrow f$ és uniformement contínua a A.

(Dem: no fer). $\square$

Exemple.
$$F : L^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)$$
$$f \longmapsto Kf := \int_a^x f(s)\,ds.$$

1) F està ben definida:

$$\|Kf\|_{L^2} = \left[\int_a^b \left(\int_a^x f(s)\,ds\right)^2 dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b \left(\int_a^b |f(s)|\,ds\right)^2 dx\right]^{1/2}$$
$$= \sqrt{b-a}\,\|f\|_{L^1} < \infty \quad (f \in L^2(a,b) \Rightarrow f \in L^1(a,b))$$

2) $F \in Lip(L^2(a,b))$

$$\|F(f) - F(g)\|_{L^2(a,b)} = \left\{\int_a^b [F(f) - F(g)]^2 dx\right\}^{1/2} \leq \left\{\int_a^b \left(\int_a^b |f(s) - g(s)|\,ds\right)^2\right\}^{1/2}$$
$$\leq \sqrt{b-a}\left(\int_a^b 1^2\,ds\right)^{1/2} \left(\int_a^b |f(s) - g(s)|^2\,ds\right)^{1/2}$$
$$= (b-a)\,\|f - g\|_{L^2(a,b)}. \qquad \square$$

Exemple. $X = C^0([0,1]) \cap C^1(]0,1[)$, $Y = C^0(]0,1[)$

$$d_X(f,g) := \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \quad \text{(Th. Weierstrass)}$$

$$d_Y(f,g) := \sup_{x\in(0,1)} |f(x)-g(x)|$$

Sigui $F : X \longrightarrow Y$ (ben definida, per construcció).
$$f \longmapsto \frac{df}{dx}$$

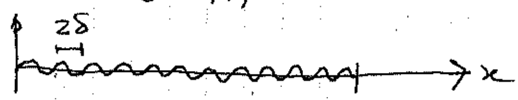
Vejam que F no és contínua per a $f(x)\equiv 0$. Hem de veure que:

$$\exists\, \varepsilon>0 \mid \forall\, \delta>0 \quad d_X(f,g)<\delta \;\;\&\;\; d_Y(F(f),F(g))>\varepsilon.$$

Siguin $\varepsilon = 1/2$, $g(x) = \frac{\delta}{\pi}\sin\frac{\pi x}{\delta}$. Tenim:

$$d_X(f,g) = \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{\delta}{\pi}\sin\frac{\pi x}{\delta}\right| = \frac{\delta}{\pi} < \delta$$

$$d_Y(F(f),F(g)) = \sup_{x\in(0,1)} |0 - \cos \pi x| = 1 > \varepsilon$$



F sí que fóra contínua en la topologia induïda per la distància

$$d_X(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| + \sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}\right| \quad \square$$

Teorema. Siguin $(x_n)\subset A \subset X$, convergent a $x^*\in X$, i $F : \bar{A} \to Y$.

1) A és tancat sii $x^* \in A$ $\quad (\forall (x_n))$

2) F és contínua sii $F(x^*) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$

3) A és dens a X sii $\forall \varepsilon>0\ \forall x\in X\ \exists a\in A \mid d(x,a)<\varepsilon$.

(Dem: aplicar les definicions corresponents per a espais topològics abstractes al cas d'espais mètrics) $\square$

Teorema. $(X,\mathcal{D}_X)$, $(Y,\mathcal{D}_Y)$ són topològicament equivalents si $\exists\, H : X \to Y$, exhaustiva & $\exists\, C_1, C_2>0$ tals que

$$C_1\, d_X(x,y) \le d_Y(H(x),H(y)) \le C_2\, d_X(x,y).$$

(Dem: veure que H és homeomorfisme). $\square$

Definició. En la situació del teorema, si $C_1 = C_2 = 1$, X i Y es diu que són espais isomètrics i l'aplicació H es diu isometria.

UPC
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Full d'examen núm.

☐ Enginyeria de Camins
☐ Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques
☐ Enginyeria Geològica

Assignatura

Alumne

Núm. Matrícula

Curs

Grup

Data

7

3.2. COMPLETESA

Si no s'indica el contrari, (X, D) serà l'espai de treball.

Definició. 1) (x_n) és de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \mid \forall n, m > N$ és $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

2) Si $\forall (x_n)$ de Cauchy $\exists \lim x_n = x^* \in X$, X es diu complet. $\square$

Demostrar que (x_n) convergent $\Rightarrow$ (x_n) de Cauchy és trivial. El recíproc s'ha d'exigir explícitament.

Exemples. 1) $\mathbb{Q}$ no és complet $(d(x,y) = |x-y|)$.

2) $(C[a,b], d_\infty)$ és complet. Sigui (f_n) de Cauchy, i.e., $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \mid \forall n, m > N \sup |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

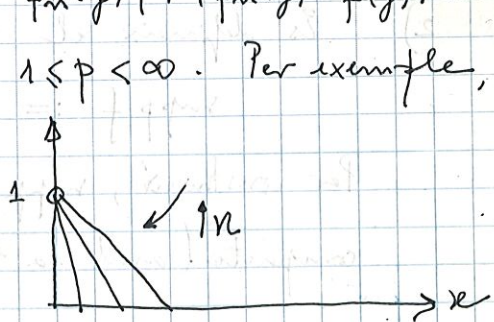
Per ser $\mathbb{R}$ complet, $\forall x \in [a,b]\ \exists \lim f_n(x) =: f(x)$ i la convergència és uniforme ($N = N(\varepsilon)$, no depèn de x). Cal veure que f és a $C[a,b]$. Sigui $\varepsilon > 0$ donat. Per ser $f_n \in C[a,b]$, $\exists \delta > 0 \mid |x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$. Per ser $f_n(x) \to f(x)$ i $f_n(y) \to f(y)$, $\exists N \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ & $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/3$. Finalment:

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

3) $(C[a,b], d_p)$ no és complet, $1 \le p < \infty$. Per exemple,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 1 \le x \le 1/n \\ 0, & 1/n < x \le 1 \end{cases}$$

és de Cauchy (un càlcul) però no convergeix a una funció contínua.



$\square$

Teorema. 1) (x_n) Cauchy $\Rightarrow$ (x_n) acotada.
2) (x_n) Cauchy $\Rightarrow$ (x_{n_k}) Cauchy
3) $(Y, \mathcal{D})$ subespai de $(X, \mathcal{D})$, complet, és complet $\Leftrightarrow$ Y és tancat
(Dem: fàcil). $\square$

Teorema. $(X, \mathcal{D}_X)$, $(Y, \mathcal{D}_Y)$ isomètrics. Aleshores:
$(X, \mathcal{D}_X)$ complet $\Leftrightarrow$ $(Y, \mathcal{D}_Y)$ complet
(Fer la demostració!) $\square$

Obs. La completesa NO és una propietat topològica. $\square$

Completació d'un espai mètric. Sigui $(X, \mathcal{D})$ un espai mètric.
$(X^*, \mathcal{D}^*)$ es diu que és una completació de $(X, \mathcal{D})$ si:
1) $(X^*, \mathcal{D}^*)$ és complet
2) $(X, \mathcal{D})$ és un subespai (topològic) de $(X^*, \mathcal{D}^*)$
3) X és dens a X^*

Teorema. 1) $\exists\, (X^*, \mathcal{D}^*)$, completació de $(X, \mathcal{D})$.
2) Si $(X_1^*, \mathcal{D}_1^*)$ i $(X_2^*, \mathcal{D}_2^*)$ són dues completacions de $(X, \mathcal{D})$, aleshores són isomètrics.
(Dem: tècnica i poc senzilla, però molt interessant. La idea és afegir a $(X, \mathcal{D})$ els límits de les successions de Cauchy).

Exemples. Els següents resultats són teoremes importants de teoria de funcions:
1) $W^{m,p}(\Omega)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $1 \leq p \leq \infty$ és complet.
2) Es defineix el suport d'una funció $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com
$$\operatorname{supp} f := \operatorname{cl}\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$$
Per construcció, $\operatorname{supp} f$ és tancat. Si també és acotat, serà compacte (amb la topologia de $\mathbb{R}^n$)

Full d'examen núm.

☐ Enginyeria de Camins
☐ Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques
☐ Enginyeria Geològica

Assignatura
Alumne
Núm. Matrícula
8
Curs
Grup
Data

El conjunt de funcions C^k amb suport compacte s'indica C_c^k (de vegades C_0^k). Es compleix:

- $C_c^\infty(\Omega)$ és dens a $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$
- $L^p(\Omega)$ és la compleció de $C_c^\infty(\Omega)$ amb la distància $d(f,g) = \|f-g\|_{L^p(\Omega)}$.

3) Sigui $\mathcal{P} = \{\Omega_i\}$ una partició de Ω $(\Omega_i \cap \Omega_j = \phi,\ \cup \overline{\Omega}_i = \overline{\Omega})$

La funció característica de Ω_i es defineix per

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega_i \end{cases}$$

Una funció $s : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es diu simple si és combinació lineal de funcions característiques. Si S és el conjunt de funcions simples, es compleix:

- S és dens a $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ $\square$

Teoremes de punt fix i aplicacions.

Definicions. Sigui $(X, \mathcal{D})$ un espai mètric i $F : X \longrightarrow X$. F es diu contractiva si $\exists\ \alpha \in [0,1)$ tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha\, d(x,y). \quad \forall x,y \in X, x \neq y$$

$x \in X$ s'anomena punt fix de F si $F(x) = x$.

Teorema. Si $(X, \mathcal{D})$ és complet i F és contractiva, $\exists!\, x \in X$ tal que $F(x) = x$.

Demostració. Sigui $x_0 \in X$, qualsevol, i definim $x_n = F^n(x_0)$. Demostrem que (x_n) és fonamental. Sense pèrdua de generalitat, suposem que $m \geq n$. Serà:

$$d(x_n, x_m) = d(F^n(x_0), F^m(x_0)) \leq \alpha^n d(x_0, F^{m-n}(x_0))$$
$$\leq \alpha^n [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})]$$
$$\leq \alpha^n [1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}] d(x_0, x_1)$$
$$\leq \alpha^n \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Per ser (X, D) complet, (x_n) té límit. Sigui $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Per ser F contractiva, $F \in Lip_1$ i per tant

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

de manera que existeixen punts fixos. Suposem que x, y ho són:

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = x \\ F(y) = y \end{array}\right\} \quad d(F(x), F(y)) = d(x,y) \leq \alpha d(x,y)$$
$$\Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y. \qquad \square$$

Obs. La demostració anterior proporciona la manera d'aproximar punts fixos d'aplicacions contractives. $\square$

Aplicacions. Són moltes. Per exemple:

1) Estudi de convergència d'algorismes iteratius.

2) Existència i unicitat de solucions d'EDO's (Picard) (PVI)

3) " " " " " d'eqs. integrals.

Vegem dos exemples de 3).

Teorema. Siguin $K \in C([a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C([a,b])$. Si es compleix:

1) $\forall x, y \in [a,b] \times [a,b]$ $K(x,y,\cdot) \in Lip(\mathbb{R})$, amb constant de Lipschitz M

2) $|\lambda| < M/(b-a)$

UPC
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Full d'examen núm.

☐ Enginyeria de Camins
☐ Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques
☐ Enginyeria Geològica

Assignatura

Alumne

Núm. Matrícula

Curs

Grup

Data

9

alehores $\exists!\ f \in C([a,b])$ solució de l'eq. de Fredholm de segona espècie:

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))\, dy + \varphi(x)$$

Dem. Sigui $F : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ definida per

$$F(f)(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))\, dy + \varphi(x)$$

Vejam que F és contractiva (en la mètrica $d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$):

$$|F(f_1) - F(f_2)| = \left|\lambda \int_a^b K(x,y,f_1(y))\, dy - \lambda \int_a^b K(x,y,f_2(y))\, dy\right|$$

$$\leqslant \lambda \int_a^b |K(x,y,f_1(y)) - K(x,y,f_2(y))|\, dy$$

$$\leqslant \lambda \int_a^b M\, |f_1(y) - f_2(y)|\, dy$$

$$\therefore\ d(F(f_1), F(f_2)) \leqslant \underbrace{\lambda M (b-a)}_{<1}\, d(f_1, f_2) \qquad \square$$

Provem ara la següent generalització del th. del punt fix:

Teorema. Si (X, D) és complet i F és tal que F^n és contractiva per a algun $n \in \mathbb{Z}^+$, alehores $\exists!\ x \in X \mid F(x) = x$.

Dem. Sigui $x_0 \in X$ i definim $x_k = F^{kn}(x_0)$. Com abans, (x_k) és de Cauchy. Sigui $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. És $x = F^n(x)$ i

$$F(x) = F F^n(x) = F^n F(x)$$

de manera que $F(x)$ és també un punt fix de F^n. Per unicitat, $F(x) = x$. $\square$

Apliquem aquest resultat:

Teorema. Siguin $K \in C([a,b] \times [a,b])$, $\varphi \in C([a,b])$. L'equació de Volterra

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)\, f(y)\, dy + \varphi(x)$$

té una única solució $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Dem. Vejam que alguna potència de l'operador $F: C([a,b]) \to C([a,b])$ definit per

$$F(f) = \lambda \int_a^x K(x,y)\, f(y)\, dy + \varphi(x)$$

és contractiva. Sigui: $M = \max |K(x,y)|$ (Weierstrass). Tindrem:

$$|F(f_1) - F(f_2)| = \left|\lambda \int_a^x K(x,y)\,(f_1(y) - f_2(y))\, dy\right|$$

$$\leq |\lambda|\, M\, (x-a) \max_{y\in[a,b]} |f_1(y) - f_2(y)|$$

$$|F^n(f_1) - F^n(f_2)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \max_{y\in[a,b]} |f_1(y) - f_2(y)|$$

$$\leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{y\in[a,b]} |f_1(y) - f_2(y)|$$

i $\forall \lambda, M, a, b \;\; \exists n \mid |\lambda|^n M^n (b-a)^n / n! < 1$. $\square$

Finalment, dues generalitzacions més del th. del punt fix:

Teorema. Sigui $S \subset X$, <u>S compacte</u>, i $F: S \longrightarrow S$ tal que

$$d(F(x), F(y)) < d(x,y) \quad \forall x, y \in S,\; x \neq y$$

Aleshores, $\exists!\, x \in S$ tal que $F(x) = x$. $\square$

Teorema. Sigui $S \subset X$, S <u>compacte i convex</u>, (X espai lineal). Si $F: S \to S$ és tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq d(x,y) \quad \forall x, y \in S,\; x \neq y,$$

aleshores $\exists x \in S \mid F(x) = x$ (potser no és única). $\square$

Full d'examen núm.

☐ Enginyeria de Camins
☐ Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques
☐ Enginyeria Geològica

Assignatura

Alumne

Núm. Matrícula

Curs

Grup

Data

10

3.3. COMPACITAT.

Definicions. 1) Sigui $(X, \mathcal{D})$ mètric i $Y \subset X$. Sigui $\varepsilon > 0$. Un conjunt Y_ε és una ε-xarxa de Y si

a) Y_ε és finit.

b) $\forall y \in Y \ \exists y_i \in Y_\varepsilon \mid d(y, y_i) < \varepsilon$.

2) $Y \subset X$ es diu totalment acotat si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists Y_\varepsilon$, ε-xarxa de Y. ☐

Teorema. Y totalment acotat $\Rightarrow$ Y acotat & $(Y, \mathcal{D})$ separable

Dem. Sigui $M = \text{dia}(Y_\varepsilon) := \sup_{y_i, y_j \in Y_\varepsilon} d(y_i, y_j)$. Serà:

$$\forall x, y \in Y \quad d(x,y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y_j) + d(y, y_j)$$
$$\leq \varepsilon + M + \varepsilon = M + 2\varepsilon$$

essent x_i, y_j tals que $d(x, x_i) < \varepsilon$, $d(y, y_j) < \varepsilon$.

Que $(Y, \mathcal{D})$ és separable és obvi. ☐

Definició. $(X, \mathcal{D})$ es diu seqüencialment compacte si

$\forall (x_n) \subset X \ \exists (x_{n_k}) \subset X$ convergent. ☐

(Obs: de vegades la compacitat seqüencial s'anomena compacitat numerable).

Teorema (Heine-Borel)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és compacte $\Longleftrightarrow$ Ω és tancat i acotat ☐

Ja l'he enunciat abans, en el cas d'espais topològics en general.

Teorema. Sigui $(X, \mathcal{D})$ un espai mètric i $Y \subset X$.

1) $(X, \mathcal{D})$ seqüencialment compacte $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{D})$ complet.
2) $\{(X, \mathcal{D})$ seqüencialment compacte $\Rightarrow$ $(Y, \mathcal{D})$ seqüencialment compacte$\}$ $\Leftrightarrow$ Y és tancat.
3) $(X, \mathcal{D})$ seqüencialment compacte $\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{D})$ és complet i totalment acotat.

Demostració. 1) Sigui (x_n) de Cauchy. Per hipòtesi, $\exists (x_{n_k})$ convergent a $x^* \in X$. Però

$$d(x^*, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_m) + d(x_m, x_n)$$
$$\longrightarrow 0 \quad \text{quan } n \to \infty \text{ per a } n_k, m \to \infty.$$

$\therefore$ (x_n) convergeix a X.

2) Trivial. 3) Difícil. $\square$

Teorema.
$(X, \mathcal{D})$ és compacte $\Leftrightarrow$ és seqüencialment compacte
(Nota: en espais topològics només és certa la implicació $\Leftarrow$).
(Dem: a l'annex 1).

Conseqüència important.
Sigui $(X, \mathcal{D})$ un espai mètric complet i $Y \subset X$. Sabem que $(Y, \mathcal{D})$ és complet $\Leftrightarrow$ Y és tancat. Suposem que Y és tancat. Pel th. primer en aquesta pàgina, $(Y, \mathcal{D})$ serà seqüencialment compacte $\Leftrightarrow$ Y és totalment acotat.
Tenim, doncs:

$$\left.\begin{array}{l}(X, \mathcal{D}) \text{ complet} \\ Y \text{ tancat}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(Y, \mathcal{D}) \text{ complet} \\ Y \text{ \underline{totalment} acotat}\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (Y, \mathcal{D})$ seqüencialment compacte $\Leftrightarrow (Y, \mathcal{D})$ compacte.

Tenim un resultat semblant al th. de Heine-Borel llevat del fet que cal exigir que Y sigui totalment acotat. Això de "totalment" no és de franc. Suposem que X és espai lineal. Es pot provar que

$(Y$ tancat i acotat $\Rightarrow Y$ compacte$) \Rightarrow \dim X < \infty$!!

Aquest és un dels fets que fan que l'anàlisi en espais de funcions sigui més complicat que a $\mathbb{R}^n$. Perdem una propietat importantíssima: tota successió acotada a $\mathbb{R}^n$ té una subsuccessió convergent. De vegades retrobarem un resultat més feble: tota successió acotada a X té una subsuccessió <u>feblement</u> convergent. Ja veurem més endavant què vol dir això. $\square$

<u>Teorema</u>. $F: (X, \mathcal{D}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{D}_Y)$, contínua. Llavors:

$(X, \mathcal{D}_X)$ compacte $\Rightarrow (\mathcal{R}(F), \mathcal{D}_Y)$ és compacte.

<u>Dem</u>. Sigui $(x_n) \subset X$ i $y_n = F(x_n)$. Per hipòtesi, $\exists (x_{n_k}) \longrightarrow x \in X$ quan $n_k \to \infty$. Per ser F contínua $F(x_{n_k}) \longrightarrow F(x)$ a Y i $(F(x_{n_k}))$ és una subsuccessió de (y_n). $\square$

Corol·lari. La compacitat és una propietat topològica. $\square$

(Obs: ni la completesa ni l'acotació total són propietats topològiques).

Definició. Sigui

$$\mathcal{C}(X,Y) = \{ F : (X, \mathcal{D}_X) \to (Y, \mathcal{D}_Y), \ F \text{ contínua} \}$$

Una classe de funcions $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ es diu equicontínua si $\forall x_1, x_2 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid d_X(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon$ $\forall F \in \mathcal{F}$.

(Obs.: $\delta = \delta(\varepsilon, x_1, x_2)$, però no depèn de la funció F). $\square$

Definició. Sigui $A \subset X$ i considerem una classe $\mathcal{F}$ de funcions $F : A \to \mathbb{R}$. $\mathcal{F}$ es diu equiacotada si

$\exists M < \infty : |F(x)| \leq M \quad \forall x \in A \quad \forall F \in \mathcal{F}$ $\square$

Teorema. Sigui $X = C([a,b])$, $d_X(x,y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$. Sigui també $\mathcal{F} \subset X$ una classe de funcions. Aleshores:

$$\mathcal{F} \text{ és compacta} \iff \begin{cases} \mathcal{F} \text{ és equicontínua} \\ \mathcal{F} \text{ és equiacotada.} \end{cases}$$ $\square$

(TEOREMA D'ARZELÀ. Dem: annex 2).

Observació. Quan es parla de classes de funcions es consideren famílies tancades de funcions. Si $\mathcal{F}$ és una família qualsevol (no necessàriament tancades), a la tesi del th. anterior cal substituir $\mathcal{F}$ compacta per $\mathcal{F}$ precompacta:

Definició: $A \subset X$ es diu precompacte (o relativament compacte) si $\bar{A}$ és compacte. $\square$

Teorema. Sigui $(X, \mathcal{D})$ compacte i $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua.
Aleshores:

1) F és uniformement contínua.
2) F és acotada a X.
3) F abasta les seves cotes superior i inferior a X.

Demostració. 1) Suposem que F no és unif. cont.: $\exists (x_n), (y_n) \subset X \mid d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ & $|F(x_n) - F(y_n)| > \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. Per ser X compacte, $\exists x_{n_k} \longrightarrow x$ i $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow y_{n_k} \longrightarrow x$ i $|F(x_n) - F(x)| < \varepsilon/2$, $|F(y_n) - F(x)| < \varepsilon/2$ per a n prou gran !!

2) Suposem que F no és acotada. $\exists (x_n) \subset X \mid F(x_n) > r(n)$, on $r(n) \longrightarrow \infty$ quan $n \to \infty$. Per ser X compacte, $\exists (x_{n_k}) \mid x_{n_k} \xrightarrow{n_k \to \infty} x$. Per ser F contínua, $F(x_{n_k}) \longrightarrow F(x)$!!

*3) Sigui $\gamma = \sup_{x \in X} |F(x)| < \infty$. Per ser F contínua, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in X \mid F(x_0) \geqslant \gamma - \varepsilon$. Sigui $(x_n) \subset X \mid \exists (x_{n_k})$ que convergeix a x_0; prenem $\varepsilon = 1/n_k$. Serà

$$\gamma - \frac{1}{n_k} \leqslant F(x_{n_k}) \leqslant \gamma$$

Prendre al límits. De la mateixa manera es demostra que la cota inferior s'abasta a X. $\square$

* (Veure el darrere)

Teorema. Siguin (X, D_X), (Y, D_Y) espais mètrics i

$$\mathcal{C}(X,Y) = \{ F : X \to Y \text{ , contínua} \}$$

Sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ definim la distància

$$\delta(F,G) = \sup_{x \in X} d_Y(F(x), G(x))$$

Aleshores $(\mathcal{C}(X,Y), \delta)$ és complet.

(Dem: generalitzar el cas $X = [a,b]$, $Y = \mathbb{R}$). $\square$

* Demostració arreglada.

Per ser F contínua:

$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \ \exists x_n \in X \mid \ D - \frac{1}{n} \leq F(x_n) \leq D$

Hem construït (x_n). Per ser X compacta $\exists (x_{n_k})$, convergent a $x^* \in X$, i que compleix

$$D - \frac{1}{n_k} \leq F(x_{n_k}) \leq D.$$

Fent $n_k \to \infty$ s'obté que $F(x^*) = D$ i $x^* \in X$.

4. ESPAIS DE BANACH.

4.1. DEFINICIONS I PROPIETATS BÀSIQUES.

Definició. Sigui V un espai vectorial sobre un cos K i $\mathcal{T}$ una topologia sobre V. $\mathcal{V} = (V, \mathcal{T})$ s'anomena espai vectorial topològic si $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ i $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ són contínues $(\lambda \in K,\ v, v_1, v_2 \in V)$.

Definició. Una aplicació $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es diu que és una norma si:

1) $\|x\| \geqslant 0$ & $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \forall x \in V$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in K \ \forall x \in V$.

3) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in V$.

Definició. Tota norma indueix una mètrica: $d(x, y) = \|x - y\|$. La topologia mètrica induïda per d s'anomena topologia normada, $\mathcal{N}$. El parell $(V, \mathcal{N})$ s'anomena espai normat. □

L'espai de funcions de test $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Sigui $C_c^\infty(\mathbb{R})$ el conjunt de funcions infinitament diferenciables amb continuïtat i amb suport compacte sobre $\mathbb{R}$. Si dotéssim $C_c^\infty(\mathbb{R})$ de la topologia generada per la distància 'max', la diferenciació no fóra contínua. L'objectiu del que segueix és definir una topologia en la qual sí que ho sigui.

Sigui $\{K_i\}$ una cadena de compactes a $\mathbb{R}$:

$$\dots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset K_{i+2} \dots, \qquad \mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i .$$

Per a $\phi \in C_c^\infty(K_j)$, definim:

$$P_{\alpha,j}(\phi) := \sup_{x\in K_j} \left| \frac{d^\alpha \phi}{dx^\alpha} \right|$$

$$A(j,r,s) := \{ \phi \in C_c^\infty(K_j) \mid P_{\alpha,j}(\phi) < r \quad \forall \alpha \leq s \}$$

amb $r>0$, $s>0$.

Sobre $C_c^\infty(K_j)$ definim la topologia que té per base

$$\{ A(j, \tfrac{1}{n}, s) \;,\; n \in \mathbb{Z}^+, s \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ \}$$

i la denotem $\mathcal{T}_j$. Anomenem $\mathcal{D}(K_j) = (C_c^\infty(K_j), \mathcal{T}_j)$.

Sigui $i_j : C_c^\infty(K_j) \to C_c^\infty(\mathbb{R})$ la injecció canònica, i sigui $\mathcal{T}$ la topologia més fina $C_c^\infty(\mathbb{R})$ que fa que i_j sigui contínua respecte de les topologies $\mathcal{T}_j$ $\forall j$. Definim:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = (C_c^\infty(\mathbb{R}), \mathcal{T}).$$

Es compleix:

- $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ és un espai topològic no metritzable.
- $\frac{d^k}{dx^k} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$ és contínua $\forall k \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

<u>Observacions</u>. 1) De forma semblant es poden definir els espais $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
2) L'espai $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ és l'element bàsic per introduir les derivades distribucionals (l'espai de distribucions és el dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$).
3) Les raons per introduir la topologia $\mathcal{T}$ són purament tècniques, no pràctiques. $\square$

<u>Definició</u>. Un espai normat complet s'anomena <u>espai de Banach</u>. $\square$

Tots els espais de funcions que ens interessaran són espais de Banach. En particular, ho són $W^{m,p}(\Omega)$ (que aquests espais són normats és fàcil de provar, que són complets és més delicat).

Full d'examen núm.

☐ Enginyeria de Camins
☐ Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques
☐ Enginyeria Geològica

Assignatura

Alumne

Núm. Matrícula

Curs

Grup

Data

Els espais de Banach són, en particular, espais mètrics, i per tant algunes de les seves propietats ja les coneixem.

En el que segueix, B indicarà un espai de Banach.

Definició. Dues normes $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ es diuen equivalents si $\exists\, c_1, c_2 > 0$ tals que:

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\| \quad \forall x. \qquad \square$$

Teorema. Si $\dim B < \infty$, totes les normes són equivalents.

Dem. Demostrem que tota norma és equivalent a la 2-norma o norma euclídea. Donada $\|\cdot\|$, sigui $\{e_i\}$ una base per B tal que $\|e_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n = \dim B$. Escrivim $x \in B$ com $x = \alpha_j e_j$. És

$$\|x\| = \|\alpha_j e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\, \|x\|_2$$

i.e., $c_2 = \sqrt{n}$, amb la notació anterior. Cal veure que $\exists\, c_1 > 0$:

$$\|x\| \geq c_1 \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2\right)^{1/2}.$$

Sigui $S = \{\beta \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n \beta_j^2 = 1\}$ i definim $f : S \to \mathbb{R}$ per

$$f(\beta) = \left\|\sum_{j=1}^n \beta_j e_j\right\|$$

Per ser f contínua i S compacte, f abasta el seu mínim m a un punt $\xi \in S$. Per ser $\{e_j\}$ base, $f(\xi) > 0$. Tenim:

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j\right\| = \left(\sum |\alpha_j|^2\right)^{1/2} f\left(\frac{\alpha_j e_j}{\left(\sum |\alpha_j|^2\right)^{1/2}}\right) \geq m \|x\|_2 \qquad \square$$

i.e., $m = c_1$.

Lema. Sigui M un subespai propi de B, amb $\dim M < \infty$. Llavors
$\exists\, x \in B \mid 1 = \|x\| = \mathrm{dist}(x, M)$.

Dem. Sigui $z \in B \setminus M$. $\exists\, (m_k) \subset M \mid \|z - m_k\| \to \mathrm{dist}(z, M) > 0$. Donat que $\dim M < \infty$ i (m_k) és acotada, $\exists\, (m_{k'}) \subset (m_k)$ tal que $m_{k'} \to m \in M$, i tindrem:

$$0 < \|z - m\| = \lim_{k' \to \infty} \|z - m_{k'}\| = \mathrm{dist}(z, M) = \mathrm{dist}(z-m, M)$$

Prendre $x = (z-m)/\|z-m\|$. $\square$

Teorema. $\partial B_1(0)$ és compacte $\iff \dim B < \infty$.

Dem. Demostrarem que si B és de dimensió infinita, $\partial B_1(0)$ no és compacte. Sigui $x_1 \in B$, $\|x_1\| = 1$. Pel lema:

$$\exists\, x_2 \in B \mid 1 = \|x_2\| = \mathrm{dist}(x_2, \mathrm{Span}\{x_1\})$$

Inductivament construim $(x_n) \subset \partial B_1(0)$. Tanmateix, aquesta successió no té una subsuccessió convergent, doncs

$$\forall n,\ \forall k < n \quad \|x_n - x_k\| \geq \mathrm{dist}(x_n, \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}) = 1 \ \square$$

Teorema. Si M és un subespai tancat de B i N és un subespai amb $\dim N < \infty$, $N + M$ és tancat. $\square$

Els subespais tancats d'espais de Banach també seran de Banach.

4.2. OPERADORS LINEALS SOBRE ESPAIS DE BANACH.

Definició. Un operador $A : B_1 \longrightarrow B_2$ és acotat si aplica acotats de B_1 en acotats de B_2. $\square$

Si A és lineal, A serà acotat si:

$$\forall x \in B_1 \quad \|Ax\|_{B_2} \leq C\,\|x\|_{B_1} \quad (C > 0).$$

Definició. Sigui $A : B_1 \to B_2$ un operador lineal i acotat. Es defineix:

$$\|A\| = \inf\{ C \mid \|Ax\|_{B_2} \leq C \|x\|_{B_1} \ \forall x \in B_1 \}.$$

Està *

Teorema. $\|\cdot\|$ és una norma sobre $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ que dota aquest espai (aplicacions lineals contínues de B_1 a B_2) d'estructura d'espai de Banach.

A més:

1) $\forall A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, $\|A\| = \sup\limits_{x \in B_1 \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|_{B_2}}{\|x\|_{B_1}} = \sup\limits_{x \mid \|x\|_{B_1}=1} \|Ax\|_{B_2}$.

2) Si $A_1 \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, $A_2 \in \mathcal{L}(B_3, B_2)$, $\|A_1 A_2\| \leq \|A_1\| \|A_2\|$.

Dem. Que $\|\cdot\|$ és una norma i que es compleixen 1) i 2) és trivial. Cal veure només que $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ és complet. Sigui (A_n) una successió de Cauchy. Serà:

$$\forall x \in B_1 \quad \|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \xrightarrow{n,m \to \infty} 0.$$

i.e., $(A_n x) \subset B_2$ és de Cauchy i per tant $\exists \ Ax = \lim\limits_{n \to \infty} A x_n$. Cal veure que $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ i $\|A_n - A\| \to 0$. Sigui $\varepsilon > 0$. $\exists N$ tal que $\|A_n - A_m\| < \varepsilon \ \forall n, m > N$. Si $\|x\| = 1$ i $n > N$:

$$\|A_n x - Ax\| = \lim_{m \to \infty} \|A_n x - A_m x\| < \varepsilon$$

$\therefore A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ & $\|A_n - A\| \to 0$ (omplir els detalls). $\square$

Està *

Teorema. Un operador lineal $A : B_1 \to B_2$ és continu $\Leftrightarrow$ és acotat.

Dem. Suposem A acotat i fixem $\varepsilon > 0$. Per a $x_0 \in B_1$:

$$\|Ax - Ax_0\|_{B_2} = \|A(x - x_0)\|_{B_2} \leq \|A\| \|x - x_0\|_{B_1}$$

de manera que si $\|x - x_0\|_{B_1} < \varepsilon / \|A\| =: \delta$ llavors $\|Ax - Ax_0\|_{B_2} < \varepsilon$.

Suposem A continu. Ho serà per a $x=0$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|x\|_{B_1} < \delta$
$\Rightarrow \|Ax\|_{B_2} < \varepsilon$. $\forall x_0 \in B_1 \setminus \{0\}$ serà, prenent $x_1 = \frac{\delta x_0}{2\|x_0\|}$:

$$\varepsilon > \|Ax_1\|_{B_1} = \frac{\delta}{2\|x_0\|_{B_1}} \|Ax_0\|_{B_2},$$

$$\|Ax_0\|_{B_2} \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} \|x_0\|_{B_1}$$

d'on A és acotat i $\|A\| \leq 2\varepsilon/\delta$. $\square$

Definició: Sigui $(A_n) \subset \mathcal{L}(B_1, B_2)$ es diu que:

1) A_n convergeix uniformement o convergeix en la topologia uniforme si $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$ per a algun $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$

2) A_n convergeix fortament si
$\forall x \in B_1 \quad \lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0$ per a algun $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$. $\square$

Clarament, convergència uniforme $\Rightarrow$ convergència forta. El recíproc en general no és cert.

Estiu Teorema (Principi de l'acotació uniforme).
Sigui $(A_n) \subset \mathcal{L}(B_1, B_2)$. Es compleix:

$$\forall x \in B_1 \ \sup_n \|A_n x\|_{B_2} < \infty \Rightarrow \sup_n \|A_n\| < \infty \qquad \square$$

Operadors acotats inferiorment.

Definició. $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ és acotat inferiorment si $\exists\, C > 0$ tal que

$$\|Ax\|_{B_2} \geq C\|x\|_{B_1} \qquad \forall x \in B_1. \qquad \square$$

Exemple. L'operador derivada de $C_0^1(]0,1[)$ a $C^0(]0,1[)$ no és continu, però sí que està acotat inferiorment:

$$\|f\| = \sup_{x\in(0,1)} |f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} \left|\int_0^x f'(s)\,ds\right|$$

$$\leq \sup_{x\in(0,1)} \left|\left(\sup_{s\in(0,x)} f'(s)\right) x\right| \leq \|f'\| \qquad \square$$

Suposem que $\dim B_1 < \infty$, $\dim B_2 < \infty$. La condició d'acotat inferiorment indica que $0 \notin \operatorname{Spec}(A)$. El següent resultat no és per tant sorprenent:

Teorema. $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ és acotat inferiorment si, i només si,

$$\exists\, A^{-1} : \operatorname{Im}(A) \subset B_2 \longrightarrow B_1, \text{ continu}.$$

Demostració. $\Rightarrow$) Per construcció, $A : B_1 \longrightarrow \operatorname{Im}(A) \subset B_2$ és exhaustiu. Suposem que $Ax = Ay$. Llavors $0 = \|Ax - Ay\| \geq C\|x - y\| \Rightarrow x = y$, i.e., A és injectiu. Existirà A^{-1} i complirà

$$\|A^{-1}y\|_{B_1} \equiv \|x\|_{B_1} \leq \frac{1}{C}\|Ax\|_{B_2} = \frac{1}{C}\|y\|_{B_2}$$

A^{-1} és acotat i per tant continu.

$\Leftarrow$) $\exists\, C : \|A^{-1}y\|_{B_1} \leq \frac{1}{C}\|y\|_{B_2} = \frac{1}{C}\|Ax\|_{B_2}$ $\square$

Definició. Sigui $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$; $f \in B_2$. El problema de trobar $x \in B_1$ tal que $Ax = f$ es diu que està <u>ben posat</u> si existeix, és únic, i depèn amb continuïtat de f. $\square$

Proposició. Si $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ és acotat inferiorment, el problema $Ax = f$ està ben posat si A és bijectiu.

Demostració. $\exists!\, x \in B_1 : Ax = f$ per ser A bijectiu. A més:

$$\|x\|_{B_1} = \|A^{-1} f\|_{B_2} \leq \|A^{-1}\| \, \|f\|_{B_2} \qquad \square$$

4.3. DUALITAT EN ESPAIS DE BANACH.

Definició. Es defineix:

$$B' := \mathcal{L}(B, \mathbb{R}) \;:\; \text{dual (topològic) de } B. \qquad \square$$

Notació. Si $f \in B'$, $x \in B$, $f(x) \equiv \langle f, x \rangle$. $\langle \cdot, \cdot \rangle : B' \times B \to \mathbb{R}$ s'anomena aparellament dual. $\square$

L'espai de distribucions.

Per definició, és l'espai dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

La distribució $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definida per

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

s'anomena δ de Dirac. Aquesta definició és totalment "neta" (?). Una altra cosa és que vulguem interpretar δ com a funció "clàssica".

La derivada distribucional k-èssima de $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es defineix com aquella distribució $D^k f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que

$$\langle D^k f, \phi \rangle = (-1)^k \langle f, D^k \phi \rangle$$

Les distribucions són, per definició, aplicacions lineals $C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ contínues, entenent la continuïtat en la topologia de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Es defineix $L^1_{loc}(\mathbb{R}) = \{$ funcions integrables sobre compactes de $\mathbb{R}\}$. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, aleshores f es pot pensar com un element de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la següent forma:

$$f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\phi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f \phi$$

Proposició: Sigui X un espai normat (no necessàriament complet). X' és Banach (i.e., complet).

Dem. Només cal emprar que els elements de X' són aplicacions $f: X \to \mathbb{R}$ contínues (per veure que tota successió de Cauchy convergeix). $\square$

Definició. $(X')'$ s'anomena bidual de X. $\square$

En el que segueix, farem un abús de llenguatge. Donats B_1, B_2, indicarem per $B_1 = B_2$ (resp. $B_1 \subset B_2$) no que B_1 sigui igual a B_2 (resp. inclòs a B_2) sinó que B_1 és isomorf a B_2 (resp. a un subespai de B_2).

Està

Proposició. $B \subset (B')'$

Dem. Donat $x \in B$, definim $F_x : B' \to \mathbb{R}$ per $F_x(f) = \langle f, x \rangle$. F_x és lineal i acotada, doncs

$$\| F_x \| = \sup_{f \in B'} \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|f\|_{B'}} \leq \|x\|_B .$$ $\square$

Definició. B es diu reflexiu si $B = (B')'$.

Exemple. Donat p, $1 < p < \infty$, sigui q el seu exponent conjugat (i.e., $1/p + 1/q = 1$). És fàcil veure que $L^p(\Omega) \subset (L^q(\Omega))'$. En efecte, sigui $f \in L^p(\Omega)$ i considerem $F_f : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida per $F_f(g) = \int_\Omega fg$. Clarament, F_f és lineal i, per la desigualtat de Hölder, acotada:

$$\| F_f \| = \sup_{g \in L^q(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{1}{\|g\|_q} \int_\Omega fg \leq \|f\|_{L^p}$$

Per tant, $F_f \in (L^q(\Omega))'$. De fet, es pot provar el següent resultat més fort: $\forall \phi \in (L^q(\Omega))' \; \exists f \in L^p(\Omega)$ tal que $\phi(g) = \int_\Omega fg \quad \forall g \in L^q(\Omega)$

i $\|\phi\|_{(L^q(\Omega))'} = \|f\|$. O sia, que no només $L^p(\Omega) \subset (L^q(\Omega))'$ sinó que $L^p(\Omega) = (L^q(\Omega))'$, essent l'isomorfisme isomètric.

Els espais $L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$, seran per tant reflexius. $L^1(\Omega)$ i $L^\infty(\Omega)$ no ho són. L'únic que es pot demostrar és que

$$L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))' \quad , \quad L^1(\Omega) \subset (L^\infty(\Omega))' \qquad \square$$

<u>Teorema</u> (Hahn-Banach). Sigui X un espai normat i $M \subset X$ un subespai. Si $f \in M'$, $\exists\, F \in X'$ tal que $F|_M = f$ i $\|f\|_{M'} = \|F\|_{X'}$. $\square$

Este

Aquest és un dels grans teoremes d'anàlisi funcional. Es basa en el lema de Zorn, el qual és conseqüència directa de l'axioma d'elecció. Si X és separable, no cal emprar el lema de Zorn. La demostració en el cas general està a l'annex 1.

mirar corol·lari 2.14

<u>Topologies sobre espais de Banach.</u>

Sigui $\mathcal{T}_s$ la topologia normada definida anteriorment, també dita topologia <u>forta</u>. Serà la generada per les boles

$$B_r(x_0) := \{ x \in B \; : \; \|x - x_0\| < r \;,\; x_0 \in B \;,\; r>0 \}$$

Per definició, la topologia <u>feble</u> és la generada per

$$b_r(x_0) := \{ x \in B : \langle f, x - x_0 \rangle < r \;,\; x_0 \in B \;,\; r>0 \;,\; \forall f \in B' \;\; \|f\|=1 \}$$

Denotarem aquesta topologia $\mathcal{T}_f$.

Suposem que B és el dual d'un espai B_*, $B = B_*'$. Llavors

$$B_* \subset B_*'' = B'$$

La definició de $b_r(x_0)$ la podem encara relaxar prenent $f \in B_*$ i no a tot l'espai B'. La topologia generada per

$$b_r^*(x_0) := \{ x \in B : \langle f, x - x_0 \rangle < r \;,\; x_0 \in B \;,\; r>0 \;,\; \forall f \in B_* \;\; \|f\|=1 \}$$

s'anomena <u>feble *</u> (feble estrella). La designarem $\mathcal{T}_f^*$. Si B és reflexiu, B_* també ho serà i $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_f^*$.

Sigui $(x_n) \subset B$. Diem que (x_n) convergeix a $x \in B$

a) fortament si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Ho escrivim $x_n \longrightarrow x$.

b) feblement si $\forall f \in B'$: $\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n - x\rangle = 0$. Ho escrivim $x_n \rightharpoonup x$

c) feblement * si $\forall f \in B_* \subset B'$ $\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n - x\rangle = 0$. Ho escrivim $x_n \xrightarrow{*} x$. S'entén que en aquest cas $B = B_*'$.

Òbviament, convergència fort $\Rightarrow$ convergència feble $\Rightarrow$ convergència feble *, és a dir, $\mathcal{T}_f^* \subset \mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}_s$. La topologia $\mathcal{T}_s$ és la més fina de totes, $\mathcal{T}_f^*$ la més grollera.

En principi, a totes les propietats topològiques cal posar-hi l'afegitó "fort" o "feble" (o "feble *"). Quan no s'indiqui el contrari, suposarem que estem en la topologia natural $\mathcal{T}_s$, en la qual es basarà sempre el dual.

Les topologies $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{T}_f^*$ no són topologies mètriques. Tindrem que $(X, \mathcal{T}_f)$ seqüencialment compacte $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_f)$ compacte, però el recíproc no serà en general cert.

Els següents lemes serveixen per demostrar un teorema important.

Lema 1. Sigui M' un subespai dens de X' i $(x_n) \subset X$.

(x_n) convergeix feblement a X $\Leftrightarrow$ (x_n) convergeix feblement a M & $\sup_n \|x_n\|_X < \infty$.

Lema 2. Si $B = (X, \mathcal{T}_s)$ (Banach) és reflexiu $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_f)$ és complet.

Lema 3. Si $B = (X, \mathcal{T}_s)$ és separable $\Rightarrow$ B' és separable.

Teorema. Sigui $B=(X,\mathcal{T}_S)$ reflexiu i $(x_n)\subset X$ acotada. Aleshores, $\exists\,(x_{n_k})$ que convergeix feblement.

Demostració. Suposarem que B és separable. B' també ho serà (lema 3). Sigui (f_n) una successió numerable densa a B'. Serà:

$$\langle f_1, x_n\rangle \leq \|f_1\|_{B'}\,\|x_n\|_B \leq \|f_1\|_{B'}\,M$$

$\Rightarrow \exists\,(x_{n_1})\subset X$ que fa que $\langle f_1, x_{n_1}\rangle$ sigui convergent (a $\mathbb{R}$)

$$\langle f_2, x_{n_1}\rangle \leq \|f_2\|_{B'}\,M$$

$\Rightarrow \exists\,(x_{n_2})\subset X$ que fa que $\langle f_1, x_{n_2}\rangle$ & $\langle f_2, x_{n_2}\rangle$ siguin convergents.

Inductivament, $\exists\,(x_{n_{i+1}})$, subsuccessió de (x_{n_i}), que fa que $\langle f_j, x_{n_{i+1}}\rangle$ convergeix $\forall j=1,2,\dots,i$. La successió que busquem és (x_{n_n}). Només cal ara aplicar els lemes 2 i 1. $\square$

Proposició. Sigui $A\subset B$. Es compleix:

A tancat i convex, B reflexiu $\Rightarrow$ A feblement tancat. $\square$

Proposició. $\overline{B_1}(0)$ és feblement seqüencialment compacta. $\square$

Observacions. El teorema anterior es pot aplicar a $L^p(\Omega)$ per a $1<p<\infty$, però no a $L^1(\Omega)$ ni $L^\infty(\Omega)$, doncs no són reflexius. Tanmateix, es pot demostrar que si $(x_n)\subset L^\infty(\Omega)$ és acotada, llavors $\exists\,(x_{n_k})$ que convergeix feblement $*$, és a dir:

$$\exists \lim_{n_k\to\infty}\int_\Omega f\, x_{n_k} \qquad \forall f\in L^1(\Omega)\subset \left(L^1(\Omega)\right)'' = \left(L^\infty(\Omega)\right)'$$

El teorema vist és la base de les anomenades "tècniques de regularització" en problemes de física matemàtica ("vanishing viscosity limits" en equacions de conservació, pertorbacions de funcionals amb restriccions, etc.), les quals no només serveixen per provar teoremes d'existència, sinó també per plantejar aproximacions numèriques.

4.4. COMPACITAT I RESOLUBILITAT EN ESPAIS DE BANACH.

Definició. $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ és compacte si $\forall T \subset B_1$ tancat i acotat $A(T)$ és precompacte (i.e., $\overline{A(T)}$ és compacte). ☐

Obs. A compacte $\Rightarrow$ A continu, i només demanaríem $A \in L(B_1, B_2)$.

Exemple. $B_1 = B_2 = C([0,1])$, $A : B_1 \longrightarrow B_2$ definit per

$$(Af)(y) = \int_0^1 K(x,y) f(x)\,dx \quad , \quad K \in C([0,1]^2)$$

és compacte. Vejam-ho.

Sigui $T = \{ f \in C([0,1]) \mid \|f\| \le M_1 < \infty \} \subset B_1$ i anomenem $M_2 = \sup_{x,y} |K(x,y)| < \infty$. $\forall f \in T$ serà $|(Af)(y)| \le M_1 M_2$, d'on $A(T)$ és acotat. Com a família de funcions, és equiacotada. K serà uniformement contínua, i per tant $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in [0,1] \ |K(x,y) - K(x,y')| < \varepsilon / M_1$ si $|y-y'| < \delta$.

Així:

$$|(Af)(y) - (Af)(y')| \le \int_0^1 |K(x,y) - K(x,y')| \, f(x)\,dy < \varepsilon$$

d'on $A(T)$ és equicontínua. Com a conjunt, $A(T)$ serà compacte (Arzelà) ☐

Definició. $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ és feblement compacte si $\forall T \in B_1$ acotat, $A(T)$ és feblement seqüencialment compacte.

Teorema. Sigui $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, B_1, B_2 reflexius. Llavors:

A compacte $\Leftrightarrow$ ($(x_n) \subset B_1$ feblement convergent $\Rightarrow$ $(Ax_n) \subset B_2$ fortament convergent). ☐

Teorema. Si $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ i $\dim \mathrm{Im}(A) < \infty \Rightarrow A$ és compacte.

(Dem: trivial) ☐

El recíproc "gairebé" és cert:

<u>Teorema</u>. Sigui $A \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ compacte. Llavors:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{I} \subset B_2 \mid \dim \tilde{I} < \infty \ \& \ \inf \{ \|Ax - \tilde{y}\| , \tilde{y} \in \tilde{I} \} < \varepsilon \|x\|$$

<u>Dem</u>. Sigui $T = \partial B_1(0) \subset B_1$. Per ser $\overline{A(T)}$ compacte, existeix una ε-xarxa. Sigui $\tilde{I}$ el subespai que genera. És $\dim \tilde{I} < \infty$ i $\mathrm{dist}(A(T), \tilde{I}) \leq \mathrm{dist}(\overline{A(T)}, \tilde{I}) < \varepsilon$. Fixat $x \in B_1 \setminus \{0\}$, $x/\|x\| \in T$ i per tant

$$\varepsilon > \mathrm{dist}\left(A\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \tilde{I} \right) = \inf_{\tilde{y} \in \tilde{I}} \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax - \tilde{y} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \inf_{\tilde{y} \in \tilde{I}} \| Ax - \tilde{y} \| \qquad \square$$

<u>Corol·lari</u>. Si $A \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ és compacte $\Rightarrow \mathrm{Im}(A)$ és separable.

El següent resultat precisa el teorema anterior i té conseqüències importants:

<u>Teorema</u>. Sigui $A \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$, B_2 separable, A compacte. Llavors, $\exists (A_n) \subset \mathcal{B}(B_1, B_2) \mid \dim \mathrm{Im}(A_n) < \infty \ \& \ \lim \|A_n - A\| = 0$.

<u>Demostració</u>. B_2 separable $\Rightarrow \exists (P_n) \subset \mathcal{B}(B_2, B_2) \equiv \mathcal{B}(B_2) \mid \forall y \in B_2$ $P_n y \to y$ & $\dim \mathrm{Im}(P_n) < \infty$ (obvi). Definim $A_n := P_n A$. Clarament, $\dim \mathrm{Im}(A_n) < \infty$. Suposem que $\|P_n A - A\| \not\to 0$. Llavors $\exists \varepsilon > 0$ i $(n') \subset (n) \mid \|A_{n'} - A\| \geq \varepsilon \ \forall n'$, és a dir,

$$\exists (x_{n'}), \ \|x_{n'}\| = 1 \mid \|A_{n'} x_{n'} - A x_{n'}\| \geq \varepsilon \quad \forall n'$$

Per ser A compacte, $\exists (A x_{n''})$ convergent a $y \in B_2$, $(x_{n''}) \subset (x_{n'})$.
Pel principi d'acotació uniforme, $\sup_n \|P_n\| =: C < \infty$ i per tant:

$$\begin{aligned} \|A_{n''} x_{n''} - A x_{n''}\| &\leq \|P_{n''} A x_{n''} - P_{n''} y\| + \|P_{n''} y - y\| + \|y - A x_{n''}\| \\ &\leq (C+1) \|A x_{n''} - y\| + \|P_{n''} y - y\| \longrightarrow 0 \quad !! \end{aligned} \qquad \square$$

<u>Definició</u>. Donat $S \subset B$, subespai, suposem que $B = S \oplus N$, amb $\dim N < \infty$. La <u>codimensió</u> de S és $\mathrm{codim}\, S := \dim N$. $\square$

<u>Teorema</u> (Fredholm). Si $A \in \mathcal{B}(B)$ és compacte

i) $\mathrm{Im}(I - A)$ és tancat

ii) $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}(I - A) = \dim \mathrm{Ker}(I - A) < \infty$

Full d'examen núm.

☐ Enginyeria de Camins
☐ Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques
☐ Enginyeria Geològica

Assignatura

Alumne

Núm. Matrícula

Curs

Grup

Data

20

Com a conseqüència (alternativa de Fredholm):

$$\forall y \in B \ \exists!\, x \in B \mid (I-A)x = y \Leftrightarrow \left((I-A)x = 0 \Rightarrow x = 0 \right) \quad \square$$

Per entendre'ns, els operadors de la forma "identitat − compacte" tenen les mateixes propietats, quant a resolubilitat, que els operadors lineals en espais de dimensió finita.

Definició. Donat $A \in L(B_1, B_2)$, la gràfica de l'operador A és:

$$G(A) := \{ (x, Ax) \mid x \in \mathrm{Dom}(A) \} \subset B_1 \times B_2 . \quad \square$$

Definició. $A \in L(B_1, B_2)$ és tancat si $G(A) \subset B_1 \times B_2$ és tancat, i.e.,

$(x_n) \subset \mathrm{Dom}(A)$, $x_n \to x$, $\lim Ax_n = y \Rightarrow x \in \mathrm{Dom}(A)$ & $Ax = y$. $\square$

Òbviament, $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2) \Rightarrow A$ tancat.

Exemple (el de sempre). $B_1 = B_2 = C([0,1])$, $A = \frac{d}{dx}$. En aquest cas, $\mathrm{Dom}(A) = C^1([0,1])$. Sigui $(x_n) \subset \mathrm{Dom}(A)$, $x_n \to x$. Llavors $x'_n \to y$ uniformement $\Rightarrow$ x és derivable amb continuïtat i $x' = y$.

Això és un resultat clàssic d'anàlisi. Veiem que A tancat $\not\Rightarrow A \in \mathcal{L}(B_1, B_1)$ $\square$

No podem prendre $\mathrm{Dom}(A) = B_1$ amb la topologia del màxim perquè no fóra Banach.

Un altre dels grans teoremes d'anàlisi funcional, en aparença innocent, és:

Teorema (de la gràfica tancada) Sigui $A \in L(B_1, B_2)$, tancat. Llavors:

$$\mathrm{Dom}(A) = B_1 \Rightarrow A \in \mathcal{L}(B_1, B_2) \quad \square$$

(dem: Annex 1)

Corol·lari. $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, $\mathrm{Im}(A) = B_2 \Rightarrow$

$A^{-1} \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$. Els operadors bijectius són bicontinus. $\square$

La condició $A \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ es pot relaxar per $A \in L(B_1, B_2)$ & A tancat. En aquest cas, es té l'anomenat teorema de Banach (la demostració és trivial).

__Definició__. Donat $A \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$, es defineix el seu operador __transposat__ (o conjugat) $A' \in \mathcal{B}(B_2', B_1')$ per $A'f = f \circ A \quad \forall f \in B_2'$ $\square$

__Proposició__. i) A' està ben definit.

ii) $(A_1 + A_2)' = A_1' + A_2'$, $(\alpha A)' = \alpha A' \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

iii) $\|A\| = \|A'\|$

iv) $(AB)' = B'A'$

__Dem__. L'única que no és del tot trivial és iii) (però quasi): $\|A'f\| = \|f \circ A\| \leq \|f\| \, \|A\| \Rightarrow \|A'\| \leq \|A\|$. Per un altre costat, $\forall x \in B_1$ $\|Ax\| = \sup_{\|f\|=1} |f(Ax)| = \sup_{\|f\|=1} |(A'f)(x)| \leq \|A'\| \, \|x\| \Rightarrow \|A\| \leq \|A'\|$ $\square$

__Definició__. Sigui X normat, $M \subset X$, $N \subset X'$. Es defineix:

$$M^\perp := \{ f \in X' \mid f(x) = 0 \ \forall x \in M \} \subset X'$$

$$^\perp N := \{ x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in N \} \subset X$$

__Teorema__. Siguin X, Y normats i $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Llavors:

i) $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \mathrm{Ker}\, A'$

ii) $\overline{\mathrm{Im}(A)} = {}^\perp(\mathrm{Ker}(A'))$

iii) $\mathrm{Ker}\, A = {}^\perp(\mathrm{Im}(A'))$

iv) $\overline{\mathrm{Im}(A')} \subset (\mathrm{Ker}(A))^\perp$

__Dem__. Provem només ii). Sigui $f \in \mathrm{Ker}(A') \subset Y'$. Serà:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in X \quad f(Ax) = (A'f)(x) = 0 \\ f \text{ contínua} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\overline{\mathrm{Im} A}) = 0 \Rightarrow \overline{\mathrm{Im} A} \subset {}^\perp(\mathrm{Ker}(A'))$$

Sigui $y \in {}^\perp(\mathrm{Ker}(A')) \setminus \overline{\mathrm{Im} A} \subset Y$. Pel th. de Hahn-Banach, $\exists g \in Y'$ | $g(y) \neq 0$ & $g(\overline{\mathrm{Im} A}) = 0$. Per tant, $\forall x \in X$ $(A'g)(x) = g(Ax) = 0 \Rightarrow$ $g \in \mathrm{Ker}(A') \subset Y'$. Però $y \in {}^\perp(\mathrm{Ker}(A')) \Rightarrow g(y) = 0$!! $\square$

El teorema anterior és realment útil quan Im (A) és tancat. El següent resultat estableix quan passa això:

<u>Teorema</u>. Sigui $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ injectiu $(\mathrm{Ker}(A) = \{0\})$. Llavors:

$$\mathrm{Im}\,(A) \text{ és tancat} \iff A \text{ és acotat inferiorment}$$

(Dem.: fàcil. Fer-la és un bon exercici) $\square$

La condició $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ es pot relaxar per $A \in L(B_1, B_2)$ & A tancat.

El teorema important és:

<u>Teorema</u>. Considerem el problema: trobar $x \in B_1$ tal que

$$Ax = f \quad , \quad A \in \mathcal{L}(B_1, B_2) \quad , \quad f \in B_2$$

Suposem que:

i) $\mathrm{Im}\,(A)$ és tancat

ii) $\langle g, f \rangle = 0 \quad \forall g \in \mathrm{Ker}\,(A') \subset B_2'$

Aleshores, existeix una solució x del problema i compleix

$$\|x\| \leq C\|f\| + \|x_0\| \quad , \quad x_0 \in \mathrm{Ker}\,(A)$$

(Dem.: annex 2) $\square$

<u>Exemple</u>. La condició ii) del teorema té normalment una interpretació física clara. Plantegem ara el problema elàstic lineal:

$$\partial_i \sigma_{ij} + b_j = 0 \quad \text{a } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

$$n_i \sigma_{ij} = t_j \quad \text{a } \partial\Omega$$

on $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$, $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\partial_k u_l + \partial_l u_k)$. Pel fet de ser $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, resulta:

$$\partial_i\, C_{ijkl}\, \partial_k u_l = -b_j \quad \text{a } \Omega$$
$$n_i\, C_{ijkl}\, \partial_k u_l = t_j \quad \text{a } \partial\Omega.$$

Situem aquest problema en el marc anterior:

$$A : (H^2(\Omega))^3 \longrightarrow (L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\partial\Omega))^3$$
$$u \longmapsto (\nabla\cdot(C:\nabla u),\ n\cdot(C:\nabla u))$$

Volem u tal que $Au = f$, on $f = (-b, t)$. Vegem què vol dir en aquest cas la condició ii). Si Ω és prou regular, es pot demostrar que:

$$\mathrm{Dom}(A') \subset B_1 = (H^2(\Omega))^3 \subset B_2' = \left((L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\partial\Omega))^3 \right)'$$

i per tant $\mathrm{Ker}(A') \subset B_1$ (en principi, $\mathrm{Ker}(A') \subset B_2'$). A més, si C té components constants, $A' = A$. Així:

$$v \in \mathrm{Ker}(A') \subset B_1 \Leftrightarrow Av = 0, \text{ i.e.:}$$
$$\partial_i\, C_{ijkl}\, \partial_k v_l = 0$$
$$n_i\, C_{ijkl}\, \partial_k v_l = 0$$

Això implica $v = c + \omega \times r$, $r = (x_1, x_2, x_3)$, c i ω vectors constants. És a dir, $\mathrm{Ker}\, A' = \mathrm{Ker}\, A$ està format per <u>moviments de sòlid rígid</u> (estem en petites deformacions). La condició ii) del teorema serà:

$$\int_\Omega -b\cdot(c+\omega\times r) + \int_{\partial\Omega} t\cdot(c+\omega\times r) = 0 \quad \forall c, \omega \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$$

$$-\int_\Omega b + \int_{\partial\Omega} t = 0 \qquad (\Sigma \text{ forces} = 0)$$

$$\& \quad -\int_\Omega b\times r + \int_{\partial\Omega} t\times r = 0 \qquad (\Sigma \text{ moments} = 0)$$

5. ESPAIS DE HILBERT

5.1. DEFINICIONS

Definició. Sigui V un espai vectorial. Una aplicació $(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es diu que és un producte escalar (o producte interior) si compleix:

1) $(x,y) = (y,x) \quad \forall x,y \in V$

2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x,z) + \beta (y,z) \quad \forall x,y,z \in V, \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

3) $(x,x) > 0 \quad \forall x \neq 0.$

Definició. $E \equiv (V, (\cdot,\cdot))$ s'anomena espai euclidi.

Definició. Si E és un espai euclidi i $x,y \in E$, es diu que x és ortogonal a y, escrit $x \perp y$, si $(x,y) = 0$.

Proposició (Cauchy-Schwarz). $|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)(y,y)}$, $x,y \in E$

Corol·lari. $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|x\| := (x,x)^{1/2}$ és una norma a E.

Definició. L'angle entre dos elements $x,y \in E$, θ, es defineix per

$$\cos\theta = (x,y) / \|x\|\,\|y\| \quad , x \neq 0, y \neq 0.$$

Observació. Els espais euclidis de dimensió infinita hereten amb les definicions anteriors les propietats geomètriques dels espais euclidis de dimensió finita, llevat de les matitzacions que introduirem posteriorment. En particular, es compleix:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \text{(Regla del paral·lelogram)}$$

$$\text{Si } (x,y) = 0 \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{(Th. de Pitàgores).}$$

Definició. Sigui E un espai euclidi. Si E és complet, es diu espai de Hilbert.

En el que segueix, E denotarà un espai euclidi, no necessàriament complet, i H un espai de Hilbert.

Exemple. Vam enunciar el fet que els espais de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega), \quad m \in \mathbb{Z}^+, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

són complets amb la topologia induïda per la norma

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \cdots + \|D^m f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

Per tant, $W^{m,p}(\Omega)$ són espais de Banach.

Pel cas particular $p=2$, fem servir la notació $H^m(\Omega) \equiv W^{m,2}(\Omega)$. Aquests són òbviament espais de Banach, però a més són euclidis amb el producte escalar definit per:

$$(f,g)_{H^m(\Omega)} := \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f \, D^\alpha g \Big)$$

Per tant, $H^m(\Omega)$ són espais de Hilbert. $\square$

Ja no veurem més tipus d'espais. Els que hem vist són:

$$\begin{array}{lcccc}
\text{Espais topològics} & & & & \\
\quad \cup & & & & \\
\text{Espais mètrics} & & & & \\
\quad \cup & & & & \\
\text{Espais normats} & \xrightarrow{+\text{ Completesa}} & \text{Espais de Banach} & \xrightarrow{\text{Exemple}} & W^{m,p}(\Omega) \\
\quad \cup & & \cup & & \\
\text{Espais euclidis} & \longrightarrow & \text{Espais de Hilbert} & \longrightarrow & H^m(\Omega)
\end{array}$$

5.2. ORTOGONALITAT I PROJECCIONS.

Per abreujar, si V és un espai vectorial indicarem per $M \subset V$ no només un subconjunt, sinó un subespai vectorial de V.

Si $M \subset E$, hem definit

$$M^\perp := \{ f \in E' : \langle f, x \rangle = 0 \ \forall x \in M \} \subset E'$$

com l'ortogonal (per la dreta) de M. Per especificar, ara direm que és l'ortogonal respecte de l'aparellament dual $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definició. Si $M \subset E$, es defineix

$$M^{\perp}_{E} := \{ y \in E \mid (x,y) = 0 \ \forall x \in M \} \subset E$$

com l'ortogonal de M respecte del producte escalar $(\cdot,\cdot)$ $\square$

Veurem que en espais euclidis $M^{\perp}_{E}$ i $M^{\perp}$ es poden identificar. Parlarem simplement de l'ortogonal i l'indicarem $M^{\perp}$.

Teorema. Sigui $M \subset E$. Es compleix.

1) $M^{\perp}$ és tancat a E
2) $M \subset N \Rightarrow N^{\perp} \subset M^{\perp}$
3) $M \subset \overline{M} = M^{\perp\perp}$
4) $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, $\{0\}^{\perp} = E$, $E^{\perp} = \{0\}$
5) Si M és dens a $E \Rightarrow M^{\perp} = \{0\}$.

Dem. 1) resulta de la continuïtat de $(\cdot,\cdot)$.

2) $x \in N^{\perp} \Leftrightarrow (x,y) = 0 \ \forall y \in N \supset M \Rightarrow (x,y) = 0 \ \forall y \in M \Rightarrow x \in M^{\perp}$

3) $x \in M \Rightarrow (x,y) = 0 \ \forall y \in M^{\perp} \Rightarrow x \in M^{\perp\perp} \Rightarrow M \subset M^{\perp\perp}$

$$\left.\begin{array}{l} y \in M^{\perp\perp} \Rightarrow (x,y) = 0 \ \forall x \in M^{\perp} \\ (\cdot,\cdot) \text{ contínua} \end{array}\right\} \Rightarrow y \in \overline{M}$$

4) és trivial.

5) Sigui $x_0 \in M^{\perp}$, $\exists x \in M \mid \forall \varepsilon > 0 \quad \varepsilon > \|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 + \|x_0\|^2 \geq \|x_0\|^2 \Rightarrow x_0 = 0$. $\square$

Teorema. Sigui $M \subset H$.

1) $M^\perp$ és complet

2) $M^\perp = \{0\} \Leftrightarrow M$ és dens a H

3) $M^\perp = \{0\}$ & M tancat $\Rightarrow M = H$

Dem. 1) $M^\perp$ tancat $\subset H$, complet $\Rightarrow M^\perp$ complet.

2) $M^\perp = \{0\} \Rightarrow M^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = H = \overline{M} \Rightarrow M$ és dens a H

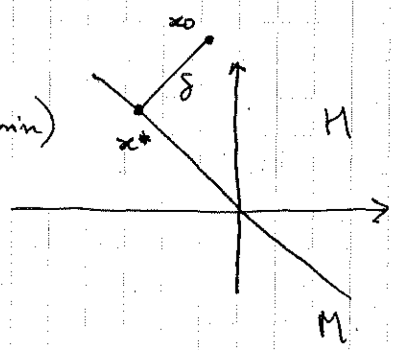
3) $M^\perp = \{0\} \Rightarrow \overline{M} = M = H$. $\square$

Corol·lari (teorema fonamental del càlcul variacional).

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ dens a } H \\ x_0 \in H,\ (x, x_0) = 0 \ \ \forall x \in M \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = 0.$$ $\square$

Teorema. $M \subset H$, tancat. Siguin

$x_0 \in H$, $\delta := \inf\{\|x - x_0\|,\ x \in M\}$



1) $\exists!\ x^* \in M$ tal que $\delta = \|x_0 - x^*\|$ ($\inf \equiv \min$)

2) $(x_0 - x^*, y) = 0 \quad \forall y \in M$

3) $\tilde{x} \in M$, $x_0 - \tilde{x} \in M^\perp \Rightarrow \tilde{x} = x^*$

Dem. Sigui $(x_n) \subset M$ tal que

$$\delta \leq \|x_0 - x_n\| < \delta + \frac{1}{n}$$

Tenim:

$$\|x_m - x_n\|^2 + \|2x_0 - x_n - x_m\|^2 = 2\|x_0 - x_n\|^2 + 2\|x_0 - x_m\|^2$$

$$\|2x_0 - (x_n + x_m)\| \geq 2\delta$$

$$\begin{aligned} \therefore \|x_m - x_n\|^2 &\leq 2\|x_0 - x_n\|^2 + 2\|x_0 - x_m\|^2 - 4\delta^2 \\ &\leq 2\left(\delta + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\delta + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\delta^2 \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} + 4\delta\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \xrightarrow{m,n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

i.e., (x_n) és Cauchy $\Rightarrow \exists \lim x_n =: x^*$ (doncs M tancat $\Rightarrow M$ complet).

Per construcció, $\delta = \|x_0 - x^*\|$.

La resta del teorema (en particular, la unicitat de x^*), es demostra com en dimensió finita. $\square$

Teorema (de projecció). Si $M \subset H$ és tancat,

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Dem. Sigui $\tilde{H} := M \oplus M^{\perp}$. Tenim:

$$M \subset \tilde{H} \ \& \ M^{\perp} \subset \tilde{H} \Rightarrow \tilde{H}^{\perp} \subset M^{\perp} \ \& \ \tilde{H}^{\perp} \subset M^{\perp\perp} = M \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{H}^{\perp} \subset M \cap M^{\perp} = \{0\} \\ M \text{ tancat } \& \ M^{\perp} \text{ tancat} \Rightarrow \tilde{H} \text{ tancat} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{H} = H$$

□

Definició. Sigui $P \in L(V)$. P és una projecció si $P^2 = P$. □

Proposició. Sigui $P \in L(V)$ una projecció (V espai lineal). Llavors:

1) $V = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$.

2) $V = M_1 \oplus M_2 \Rightarrow \exists P \in L(V) \mid P^2 = P \ \& \ M_1 = \operatorname{Ker} P, \ M_2 = \operatorname{Im} P$. □

Definició. Sigui $\Pi \in L(E)$ una projecció. Es diu que Π és ortogonal si $\operatorname{Ker} \Pi \perp \operatorname{Im} \Pi$. En aquest cas

$$E = \operatorname{Ker} \Pi \oplus (\operatorname{Ker} \Pi)^{\perp} = \operatorname{Im} \Pi \oplus (\operatorname{Im} \Pi)^{\perp}$$

□

Proposició. Si Π és una projecció ortogonal, $\Pi \in \mathcal{L}(E)$ & $\|\Pi\| = 1$.

Dem. $\forall x \in E \ \exists! \ x_1 \in \operatorname{Ker} \Pi, \ x_2 \in \operatorname{Im} \Pi \mid x = x_1 + x_2$, i tenim:

$$\|\Pi x\|^2 = \|x_2\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2 \ (\text{Pitàgores}) \Rightarrow \Pi \in \mathcal{L}(E).$$

Per veure que $\|\Pi\| = 1$, prendre $x \in \operatorname{Im} \Pi$. □

Teorema (de la projecció ortogonal) Sigui $M \subset H$, tancat. Llavors:

$$\exists! \ \Pi \in \mathcal{L}(H), \text{ projecció ortogonal, tal que } M = \operatorname{Im}(\Pi).$$

(dem. fàcil).

<u>Teorema</u>. Sigui $M \subset H$, tancat, i Π la projecció ortogonal tal que $M = \mathrm{Im}(\Pi)$. Aleshores:

$$\forall x \in H \quad \| x - \Pi x \| = \inf \{ \| x - y \| ,\ y \in M \}$$

<u>Dem</u>. $\forall y \in M = \mathrm{Im}\, \Pi$, $(y, x - \Pi x) = (y, x_2) = 0$, essent $x = x_1 + x_2$, $x_2 \in \ker \Pi \perp \mathrm{Im}\, \Pi \ni x_1$. Per tant, $x - \Pi x \in M^{\perp}$ i

$$\forall y \in M \ \| x - y \|^2 = \| x - \Pi x + \Pi x - y \|^2 = \| x - \Pi x \| + \| \Pi x - y \|^2$$
$$\geq \| x - \Pi x \| .$$

□

<u>Observació</u>. El problema d'aproximació d'espais de Hilbert es basa en el teorema anterior. Suposem que H és un espai de Hilbert i H_h una aproximació d'elements finits de H. Tindrem que:

$$\forall x \in H \quad \| x - \Pi x \| \leq \| x - \tilde{x}_h \| \quad \forall \tilde{x}_h \in H_h .$$

La distància entre H_h i H (i.e., la qualitat de l'aproximació) la dóna Πx que, en general, serà complicadíssim. Ara bé, una cota superior a aquesta distància la proporcionarà $\tilde{x}_h \in H_h$, qualsevol. Es tracta simplement de triar $\tilde{x}_h$ hàbilment. Una bona opció és prendre l'interpolant de x a l'espai d'elements finits H_h.

□

<u>Definició</u>. $\{ \phi_n \} \subset H$ es diu conjunt ortogonal maximal si:

1) $(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j$
2) $(\phi, \phi_i) = 0 \quad \forall i \Rightarrow \phi = 0$.

<u>Definició</u>. Si $\{ \phi_n \} \subset H$ és un conjunt ortogonal maximal i H és separable, $\{ \phi_n \}$ s'anomena <u>base ortonormal</u> de H.

<u>Proposició</u>. Si $\{ \phi_n \} \subset H$ és un sistema ortogonal:

$$\sum_k | (x, \phi_k) |^2 \leq \| x \|^2 \quad \text{(desigualtat de Bessel)}.$$

<u>Teorema</u>. Són equivalents (H separable):

1) $\{ \phi_n \}$ és una base ortonormal
2) $\mathrm{Span} \{ \phi_n \}$ és dens a H
3) $\| x \|^2 = \sum_k | (x, \phi_k) |^2$ (igualtat de Parseval)
4) $\forall x \in H \ \exists \{ a_k \} \subset \mathbb{R} \mid x = \sum_k a_k \phi_k$

5.3. DUALITAT EN ESPAIS DE HILBERT.

Donat $x \in H$, podem construir de forma trivial $x' \in H'$ (dual topològic de H) de la següent manera:

$$K : H \longrightarrow H' \qquad , \qquad x' : H \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x' \qquad \qquad y \longmapsto \langle x', y\rangle := (x,y)$$

i.e., $x' = (x, \cdot)$. L'aplicació K és clarament injectiva. El següent teorema (un altre dels "grans" d'anàlisi funcional) estableix que, de fet, és un homeomorfisme isomètric:

__Teorema__ (de representació de Riesz). $\forall f \in H'$ $\exists !\, x \in H$ tal que:

1) $f = (x, \cdot)$, i.e., $\langle f, y\rangle = (x,y) \quad \forall y \in H$

2) $\|f\|_{H'} = \|x\|_H$

__Dem__. Si $f = 0$, $x = 0$. Suposem $f \neq 0$. Llavors, Ker f és un subespai propi tancat de H i $\exists\, v \neq 0 \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$. Sigui $x = \alpha v$, amb $\alpha = \langle f, v\rangle / \|v\|^2$. Serà $x \perp \mathrm{Ker} f$ i $\langle f, x\rangle = (x,x) = \langle f, v\rangle^2 / \|v\|^2$. Donat $y \in H$, $\exists !\, \beta \in \mathbb{R}$ & $z \in \mathrm{Ker} f$ tal que $y = \beta x + z$ per a algun $x \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$. Serà:

$$\langle f, y\rangle = \langle f, \beta x\rangle = \beta \langle f, x\rangle = \beta (x,x)$$
$$= (\beta x + z, x) = (y, x) = (x, y)$$

Vejam que x és únic. Suposem que $\exists\, w \in H \mid \langle f, y\rangle = (w, y)\ \forall y \in H$. Llavors:

$$0 = \langle f, y\rangle - \langle f, y\rangle = (x,y) - (w,y) = (x - w, y) \quad \forall y \in H$$

Prenent $y = x - w$ resulta que $x = w$. Finalment:

Modificació: Donat $y \in H$, sigui $z = \langle f, y\rangle v - \langle f, v\rangle y$, $\bar{z} = y - z$. Aleshores $\langle f, z\rangle = \langle f, y\rangle\langle f, v\rangle - \langle f, v\rangle\langle f, y\rangle = 0 \Rightarrow z \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow z \perp x \Leftrightarrow$ $0 = (z, x) = \left(\langle f, y\rangle v - \langle f, v\rangle y, \frac{\langle f, v\rangle}{\|v\|^2} v\right) = \langle f, y\rangle\langle f, v\rangle - \langle f, v\rangle (y, x) \Rightarrow (y, x) = \langle f, y\rangle$

$$\|f\|_{H'} = \sup_{y\in H-\{0\}} \frac{\langle f, y\rangle}{\|y\|} = \sup_{y\in H\setminus\{0\}} \frac{(x,y)}{\|y\|}$$

Per la desigualtat de Schwarz, $(x,y) \le \|x\| \, \|y\|$. El suprem anterior s'abasta per a $y = x$ i val $\|x\|$. $\square$

El teorema de Riesz és definitiu: en espais de Hilbert, H i H' són algebraicament i topològica equivalents. En particular, tots els espais de Hilbert són reflexius: $(H')' = H$.

Escriurem $H \cong H'$. Tanmateix, els espais H i H' poden contenir elements totalment diferents. Per exemple, considerem $H = H_0^1(a,b)$ i anomenem $H' = (H_0^1(a,b))' =: H^{-1}(a,b)$. Veurem un teorema que garanteix que les funcions de $H_0^1(a,b)$ són contínues. En canvi, $H^{-1}(a,b)$ té elements tan desagradables (?) com la δ de Dirac, doncs és un funcional continu: $\delta : H_0^1(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>Operador adjunt</u>.

Siguin H_1, H_2 espais de Hilbert i H_1', H_2' els seus duals. Sigui també $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Hem definit l'operador transport d'A per

$$\langle f, Ax_1\rangle_{H_2'\times H_2} = \langle A'f, x_1\rangle_{H_1'\times H_1}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} A' : H_2' &\longrightarrow H_1' \quad (\text{continu}) \\ f &\longmapsto A'f \,, \quad \begin{aligned} A'f : H_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle f, Ax\rangle \end{aligned} \end{aligned}$$

Pel teorema de representació de Riesz, $\exists!\, x_2 \in H_2 \mid \langle f, y_2\rangle = (x_2, y_2)$ $\forall y_2 \in H_2$. Anomenem $f = K_2 x_2$. De forma semblant podem definir K_1. Tindrem:

$$\begin{aligned} \langle f, Ax_1\rangle_{H_2'\times H_2} &= \langle K_2x_2, Ax_1\rangle_{H_2'\times H_2} = \langle A'K_2x_2, x_1\rangle_{H_1'\times H_1} \\ &= (K_1^{-1}A'K_2x_2, x_1)_{H_1\times H_1} \\ &= (x_2, Ax_1)_{H_2\times H_2} \end{aligned}$$

Full d'examen núm.

☐ Enginyeria de Camins
☐ Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques
☐ Enginyeria Geològica

Assignatura

Alumne

Núm. Matrícula

Curs

Grup

Data

Definició. Donat $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, es defineix el seu operador adjunt, $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, per

$$A^* := K_1^{-1} A' K_2 \qquad \square$$

A^* verificarà $(x_2, Ax_1) = (A^* x_2, x_1) \quad \forall x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$.

Si tenim,

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[r, shift left, "A"] \arrow[d, shift right, "K_1"'] & H_2 \arrow[l, shift left, "A^*"] \arrow[d, shift right, "K_2"'] \\
H_1' \arrow[u, shift right, "K_1'"'] & H_2' \arrow[l, "A'"] \arrow[u, shift right, "K_2^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

K_i : operadors de Riesz, $i=1,2$.
A' : transport de l'operador A
A^* : adjunt de l'operador A.

Exemple. Sigui $K : L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$ definit per:

$$(Kf)(t) = \int_a^b k(t,s) f(s)\, ds, \qquad k \in L^2([a,b]^2)$$

Vejam que:

$$(K^* g)(t) = \int_a^b k(s,t)\, g(s)\, ds$$

En efecte:

$$(g, Kf) = \int_a^b g(t) (Kf)(t)\, dt = \int_a^b g(t) \left\{ \int_a^b k(t,s) f(s)\, ds \right\} dt$$

$$= \int_a^b f(s) \left(\int_a^b g(t) k(t,s)\, dt \right) ds = (K^* g, f) \qquad \square$$

Teorema (tot trivial):

1) $(A+B)^* = A^* + B^*$, $\quad (\alpha A)^* = \alpha A^*$
2) $(AB)^* = B^* A^*$
3) $I^* = I$

4) $\|A\| = \|A^*\|$

5) Si A és bijectiu, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

6) $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

7) $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$

8) $\overline{\operatorname{Im} A} = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$

9) $\overline{\operatorname{Im} A^*} = (\operatorname{Ker} A)^\perp$ $\square$

<u>Definició</u>. Sigui H_0 dens a H_1 i considerem $A \in \mathcal{L}(H_0, H_1)$. A es diu <u>autoadjunt</u> si $A^* = A$. $\square$

Observar que per tal que A sigui autoadjunt calen dues coses: $\operatorname{Dom}(A^*) = \operatorname{Dom}(A) = H_0$ i $(x, Ay) = (Ax, y)$ $\forall x, y \in H_0$.

<u>Definició</u>. Siguin H_0, H_1 com abans i $A \in L(H_0, H_1)$. A es diu <u>simètric</u> si

$$\forall x, y \in \operatorname{Dom}(A) \quad (x, Ay) = (Ax, y). \qquad \square$$

Ara no demanem continuïtat de l'operador A. Si la tinguéssim, <u>no</u> demanem que $\operatorname{Dom}(A) = \operatorname{Dom}(A^*)$ (en general, $\operatorname{Dom}(A) \subset \operatorname{Dom}(A^*)$).

<u>Exemple</u> L'operador laplacià $H_0^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ és autoadjunt, doncs $\forall u, v \in H_0^2(\Omega)$

$$(u, \Delta v) = \int_\Omega u \Delta v = \int_\Omega u \nabla\cdot(\nabla v) = \int_\Omega \nabla\cdot(u\nabla v) - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

$$= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - \int_\Omega \nabla\cdot(v \nabla u) + \int_\Omega v \Delta u$$

$$= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} + \int_\Omega v \Delta u = (\Delta u, v) \qquad \square$$

<u>Definició</u>. $A \in \mathcal{L}(H)$ és <u>normal</u> si $AA^* = A^*A$ $\square$

<u>Teorema</u>. $A \in \mathcal{L}(H)$ és normal $\iff \|A^* x\| = \|A x\|$ $\forall x \in H$

<u>Dem</u>. $\Rightarrow)$ $\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x)$

$$= (AA^*x, x) = (A^*x, A^*x).$$

$$\Leftarrow)\ 0 = \|Ax\|^2 - \|A^*x\|^2 = (A^*Ax, x) - (AA^*x, x)$$
$$= ((A^*A - AA^*)x, x) \quad \forall x \in H \qquad \square$$

5.4. PROBLEMES DE CONTORN ABSTRACTES.

El que segueix és una abstracció de la teoria de problemes de contorn en espais de Hilbert.

Definició. Es diu que H té la propietat de traça si:

1) $H \subset \tilde{H}$, espai de Hilbert amb una topologia més feble que H.

2) H és dens a $\tilde{H}$ i $\tilde{H}$ és un espai pivot:
$$H \subset \tilde{H} = \tilde{H}' \subset H'.$$

3) $\exists\ \gamma : H \longrightarrow \partial H$, espai de Hilbert tal que:
$$H_0 := \operatorname{Ker} \gamma \text{ és dens a } H \qquad (\text{serà } H_0 \subset \tilde{H} = \tilde{H}' \subset H_0')$$

γ s'anomena operador de traça. $\square$

Exemple. Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, acotat, i definim:

$H^{1/2}(\partial\Omega) :=$ clausura de $L^2(\partial\Omega)$ respecte de la norma:
$$\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf \left\{ \|\tilde{f}\|_{H^1(\Omega)},\ \tilde{f} \in H^1(\Omega)\ \&\ \tilde{f}|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

(Ens queda definir apropiadament $\tilde{f}|_{\partial\Omega}$ per a $f \in H^1(\Omega)$). En aquest cas:
$$H \equiv H^1(\Omega), \quad \tilde{H} \equiv L^2(\Omega), \quad \partial H \equiv H^{1/2}(\partial\Omega)$$
$$\gamma \equiv (\cdot)|_{\partial\Omega}, \quad \operatorname{Ker}\gamma =: H_0 \equiv H_0^1(\Omega).$$

$H^1(\Omega)$ té la propietat de traça. $\square$

Fórmula de Green.

Siguin H_1, H_2 dos espais de Hilbert amb la propietat de traça i considerem una forma bilineal contínua $B: H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. $\forall x \in H_1$, $B(x,\cdot) \in H_2' \subset H_{2,0}'$: Tenim definit un operador $A: H_1 \longrightarrow H_{2,0}'$:

$$B(x,y) =: \langle Ax, y\rangle \quad , x \in H_1 \ , y \in H_{2,0}$$

De forma semblant, tenim definit $A^*: H_2 \longrightarrow H_{1,0}'$ per:

$$B(x,y) =: \langle A^* y, x\rangle \quad , x \in H_{1,0} \ , y \in H_2$$

<u>Teorema</u>. En les condicions anteriors, definim els espais:

$$H_{1,A} := \{ x \in H_1 \mid Ax \in \widetilde{H}_2 \} \qquad (H_{2,0} \subset H_2 \subset \widetilde{H}_2 = \widetilde{H}_2' \subset H_{2,0}')$$

$$H_{2,A^*} := \{ y \in H_2 \mid A^* y \in \widetilde{H}_1 \} \qquad (H_{1,0} \subset H_1 \subset \widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_1' \subset H_{1,0}')$$

Existeixen uns únics operadors

$$\delta \in \mathcal{L}(H_{1,A}, \partial H_2') \quad , \quad \delta^* \in \mathcal{L}(H_{2,A^*}, \partial H_1')$$

tals que (fórmules de Green):

$$B(x,y) = (y, Ax)_{\widetilde{H}_2} + \langle \delta x, \gamma^* y\rangle_{\partial H_2' \times \partial H_2} \quad x \in H_{1,A}, \ y \in H_2$$

$$= (A^* y, x)_{\widetilde{H}_1} + \langle \delta^* y, \gamma x\rangle_{\partial H_1' \times \partial H_1}, \quad x \in H_1, \ y \in H_{2,A^*} \qquad \square$$

(Nečas, Aubin).

La teoria de problemes de contorn abstracte és molt interessant si l'esperit del lector és l'adient. En les aplicacions que ens interessen, és suficient conèixer-la aplicada al cas particular d'espais de Sobolev.

Teoria d'existència.

Siguin H_1, H_2 espais de Hilbert i $B: H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Donada $f \in H_2'$, ens plantegem el següent problema: Trobar $x \in H_1$ tal que

$$B(x, y) = \langle f, y \rangle \quad \forall y \in H_2.$$

Les condicions d'existència i unicitat s'estableixen en el següent resultat, generalització de lema de Lax-Milgram:

Teorema. Suposem que:

1) $\exists\, M > 0$: $\quad B(x,y) \leq M \|x\| \|y\| \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2.$

2) $\exists\, \gamma > 0$: $\quad \inf\limits_{x, \|x\|=1} \sup\limits_{y, \|y\| \leq 1} |B(x,y)| \geq \gamma$

3) $\forall y \neq 0 \quad \sup\limits_{x} |B(x,y)| > 0$

Aleshores, existeix una única solució $x \in H_1$ tal que $B(x,y) = \langle f, y \rangle$ $\forall y \in H_2$ i compleix:

$$\|x\|_{H_1} \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{H_2'}$$

Demostració. $\forall x \in H_1$ $B(x, \cdot) \in H_2'$, per la continuïtat de B. Sigui $F_x = B(x, \cdot)$. Pel th. de representació de Riesz, $\exists!\, y_F \in H_2$ tal que $F_x = (y_F, \cdot)$. Donat que y_F depèn linealment de x, escrivim $y_F = Ax$. Serà:

$$\|Ax\|_{H_2} = \|F_x\|_{H_2'} = \|B(x, \cdot)\|_{H_2'}$$
$$= \sup_{y \neq 0} |B(x,y)| \frac{1}{\|y\|_{H_2}} \leq M \|x\|_{H_1}$$

$\therefore$ A és continu, amb $\|A\| \leq M$. A més, A és acotat inferiorment, doncs:

$$\|Ax\|_{H_2} = \sup_{y\neq 0} \frac{|B(x,y)|}{\|y\|} = \sup_{y,\|y\|\leq 1} \|x\| \, B\left(\frac{x}{\|x\|}, y\right)$$
$$\geq \|x\| \inf_{\|\tilde{x}\|=1} \sup_{\|y\|\leq 1} B(\tilde{x}, y) \geq \gamma \|x\|$$

$\therefore \ \exists\, A^{-1} : \mathrm{Im}(A) \subset H_2 \to H_1$, continu, essent $\mathrm{Im}(A)$ tancat (en efecte, (Ax_n) convergent & A acotat inferiorment $\Rightarrow$ (x_n) convergent, $x_n \to x^*$. Per ser A continu, $Ax_n \to Ax^*$ $\Rightarrow \mathrm{Im}(A)$ és tancat).

Suposem que $y_0 \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$, $y_0 \neq 0$. Serà $(Ax, y_0) = 0 \ \forall x \in H_1$, però $(Ax, y_0) = B(x, y_0) = 0 \ \forall x \in H_2$ és impossible per la hip. 3. Per tant $y_0 = 0$, i.e., $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Im}(A) = H_2$ (A és exhaustiu).

Sigui y_1 tal que $\langle f, \cdot \rangle = (y_1, \cdot)$. Per ser A bijectiu, $\exists x_1 \in H_1$ tal que $Ax_1 = y_1$ i per tant

$$\forall y \in H_2 \quad (Ax_1, y) = (y_1, y) \iff \forall y \in H_2 \quad B(x_1, y) = \langle f, y \rangle .$$

x_1 és una solució del problema. La unicitat és conseqüència trivial de la hip. 2. A més, $\|x_1\| \leq \|A^{-1}\| \, \|y_1\| \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|$ $\square$

Sovint és suficient emprar la següent versió simplificada:

Corol·lari 1 (Lema de Lax-Milgram). Si es compleix:

1) $\forall x, y \in H \quad B(x,y) \leq M \|x\| \, \|y\| \quad (M > 0)$ CONTINUITAT
2) $\forall x \in H \quad B(x,x) \geq \gamma \|x\|^2 \quad (\gamma > 0)$ COERCIVITAT

aleshores $\exists!\, x \in H \mid B(x,y) = \langle f, y \rangle \ \forall y \in H$. $\square$

Corol·lari 2. En les condicions del teorema anterior:

$$x_n \longrightarrow x \ \Rightarrow \ B(x_n, y) \longrightarrow B(x,y) \quad \forall y \in H_2$$

Dem. $B(x_n, y) = (Ax_n, y) = (y, Ax_n) = \langle f, Ax_n \rangle \longrightarrow \langle f, Ax \rangle$ $= (y, Ax) = B(x, y)$ per a alguna $f \in H_2'$ $\square$

El següent exemple és representatiu de com s'apliquen les tècniques de regularització per provar existència i unicitat.

Example. Siguin $V := (H_0^1(\Omega))^n$, $Q := L^2(\Omega)$ i $Q_0 := \{q \in Q \mid \int_\Omega q = 0\}$.
Demostrem que $\exists!\ (u, p) \in V \times Q_0$ tal que

$$\begin{aligned} \nu(\nabla u, \nabla v) - (p, \nabla\cdot v) &= \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V \\ (q, \nabla\cdot u) &= 0 \quad \forall q \in Q_0 \end{aligned} \qquad (1)$$

amb $\nu > 0$ i $f \in V'$. Observem primer que la forma bilinear $a(u,v) := \nu(\nabla u, \nabla v)$ és coerciva per la desigualtat de Poincaré-Friedrichs, $a(v,v) \geq K_a \|v\|^2$.

Considerem el problema regularitzat:

$$\begin{aligned} \nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla v) - (p^\varepsilon, \nabla\cdot v) &= \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V \\ \varepsilon(p^\varepsilon, q) + (q, \nabla\cdot u^\varepsilon) &= 0 \quad \forall q \in Q_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

amb $\varepsilon > 0$. Sigui $H := V \times Q$ i considerem:

$$B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad B(u^\varepsilon, p^\varepsilon; v, q) = \nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla v) - (p^\varepsilon, \nabla\cdot v) + \varepsilon(p^\varepsilon, q) - (q, \nabla\cdot u^\varepsilon)$$

$$F : H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(v, q) = \langle f, v\rangle$$

B és contínua i coerciva $\forall \varepsilon > 0$, doncs:

$$B(v, q; v, q) = \nu(\nabla v, \nabla v) + \varepsilon(q, q) \geq \min\{K_a, \varepsilon\}\left(\|v\|_V^2 + \|q\|_Q^2\right)$$

$\therefore\ \exists!\ (u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ solució del problema (2).

Prenent $v = u^\varepsilon$ i $q = p^\varepsilon$ a (2):

$$K_a \|u^\varepsilon\|^2 \leq \nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) = \langle f, u^\varepsilon\rangle - \varepsilon(p^\varepsilon, p^\varepsilon) \leq \|f\|\,\|u^\varepsilon\| \Rightarrow \|u^\varepsilon\| \leq \frac{\|f\|}{K_a}$$

Per als espais V i Q es pot demostrar que $\exists K_b > 0$ tal que

$$\forall q \in Q\ \exists v \in V \setminus \{0\} \mid \quad (q, \nabla\cdot v) \geq K_b \|q\|\,\|v\| \quad \text{(Ladyzhenskaya)} \quad (3)$$

Sigui N_a la constant de continuïtat de $a(\cdot,\cdot)$. Prenent la v associada a p^ε tindrem:

$$K_b \|p^\varepsilon\|\,\|v\| \leq (p^\varepsilon, \nabla\cdot v) = \langle f, v\rangle - \nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla v) \leq \left(\|f\| + N_a \frac{\|f\|}{K_a}\right)\|v\| \Longrightarrow$$

$$\|p^\varepsilon\| \leq \frac{\|f\|}{K_b}\left(1+\frac{N_a}{K_a}\right)$$

Així, (u^ε), (p^ε) són successions acotades independentment de ε

$\therefore\ \exists u^* \in V$ & $p^* \in Q$ | $u^\varepsilon \rightharpoonup u^*$ & $p^\varepsilon \rightharpoonup p^*$ quan $\varepsilon \to 0$

Fent servir el corol·lari 2 anterior:

$$\nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla v) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \nu(\nabla u^*, \nabla v) \qquad \forall v \in V$$

Quan $v \in V$, $\nabla\cdot v \in L^2(\Omega) = \left(L^2(\Omega)\right)'$, i per tant

$$(p^\varepsilon, \nabla\cdot v) \to (p^*, \nabla\cdot v) \qquad \forall v \in V$$

$$(q, \nabla\cdot u^\varepsilon) \to (q, \nabla\cdot u^*) \qquad \forall q \in Q_0$$

Prenent límits quan $\varepsilon \to 0$ a (2) veiem que u^*, p^* és solució de (1).

Suposem que (u_1, p_1), (u_2, p_2) són dues solucions del problema (1). Serà:

$$0 = \nu(\nabla(u_1-u_2), \nabla v) - (p_1-p_2, \nabla\cdot v) \qquad \forall v \in V$$

$$0 = (q, \nabla\cdot(u_1-u_2))$$

Prenent $v = u_1 - u_2$ resulta $\nu(\nabla(u_1-u_2), \nabla(u_1-u_2)) = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ i per tant $(p_1-p_2, \nabla\cdot v) = 0$ $\forall v \in V$. La condició (3) anterior implica $p_1 = p_2$ $\square$

5.5. TEORIA ESPECTRAL (Col·lecció de resultats).

El problema genèricament és estudiar l'operador $(\lambda I - A)^{-1}$ per a $\lambda \in \mathbb{C}$. En principi, ens situem en un espai lineal normat X i $A \in L(X)$. Anirem obtenint més resultats si estem en un espai de Banach B o en un de Hilbert H.

<u>Definicions</u>. El problema de trobar $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X \setminus \{0\}$ tals que $(\lambda I - A)x = 0$ s'anomena <u>problema d'autovalors</u>. x es diu <u>autovector</u> i λ <u>autovalor</u>, essent la seva <u>multiplicitat</u> $=$ dim Ker$(\lambda I - A)$. Definim els conjunts:

$\mathrm{Spec}_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \dim \ker(\lambda I - A) > 0\}$. Espectre <u>puntual</u>.

$\mathrm{Spec}_R(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spec}_p(A) \mid \mathrm{Im}(\lambda I - A) \neq X\}$. Espectre <u>residual</u>

$\mathrm{Spec}_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Spec}_p(A) \cup \mathrm{Spec}_R(A)\} \mid (\lambda I - A)^{-1} \notin \mathcal{L}(X)\}$. Esp. <u>continu</u>

$\mathrm{Spec}(A) := \mathrm{Spec}_p(A) \cup \mathrm{Spec}_R(A) \cup \mathrm{Spec}_c(A)$. <u>Espectre</u> de l'operador A

$\mathrm{Resolv}(A) := \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spec}(A)$. <u>Resolvent</u> de l'operador A.

Full d'examen núm.

- [ ] Enginyeria de Camins
- [ ] Enginyeria Tècnica d'Obres Públiques
- [ ] Enginyeria Geològica

Assignatura

Alumne — Núm. Matrícula

Curs — Grup — Data

Si $\lambda \in Resolv(A)$, $\lambda I - A$ s'anomena operador resolvent.

Definició. $(P_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{L}(H)$ es diu que és una resolució de la identitat si:

1) $P_n^2 = P_n \ \forall n$, 2) $P_n P_m = 0$ si $n \neq m$, 3) $I = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$

Teorema. Si (P_n) és una resolució de la identitat, $Im(P_n) \perp Im(P_m)$ per a $n \neq m$ i $H = \sum_{n=0}^{\infty} Im(P_n)$.

Teorema. Sigui $A \in L(H)$ i (P_n) una resolució de la identitat amb $P_n \neq 0$ $\forall n$. Si $A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$, amb $\lambda_n \neq \lambda_m$ si $n \neq m$, llavors $Spec_p(A) = \{\lambda_n\}$ i $Im(P_n) = Ker(\lambda_n I - A)$.

Proposició. Siguin $A \in \mathcal{L}(B)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\|A\| < |\lambda|$. Llavors $\lambda \in Resolv(A)$ i es té que:

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n, \quad \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$$

Teorema. Si $A \in \mathcal{L}(B)$, $Spec(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|A\|\}$

Teorema. Sigui $A \in L(H)$ de la forma:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$$

amb (P_n) una resolució de la identitat. Llavors $Dom(A)$ és dens a H i

$$Dom(A) = H \iff A \text{ és continu} \iff \sup_n \{|\lambda_n|\} < \infty \quad (\text{és } \sup_n \{|\lambda_n|\} = \|A\|)$$

Teorema. Sigui $A \in L(H)$ i $\lambda \neq 0$. Llavors:

1) Si A és normal:

1.1. $Spec_R(A) = \emptyset$

1.2. $Ker(\lambda I - A) \perp Ker(\mu I - A)$, $\mu \neq \lambda$.

N

2) Si A és autoadjunt, $\mathrm{Spec}(A) \subset [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$.

3) Si A és compacte:

3.1. $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}_p(A)$ (Com en dimensió finita !!)

3.2. $\forall \varepsilon > 0$ $\mathrm{card}\{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \mid |\lambda| > \varepsilon\} < \infty$

3.3. Si A és autoadjunt, $\exists \lambda \in \mathrm{Spec}(A) \mid |\lambda| = \|A\|$. $\square$

Si aquest teorema fos "òptim", ja es veu que si ens volem plantejar la descomposició espectral com en dimensió finita cal que l'operador sigui compacte i, per tal de tenir la teo 1.2, normal. En aquest cas, tot rutlla com un s'espera:

<u>Teorema</u> (espectral). Sigui $A \in \mathbb{L}(H)$ normal i compacte. Aleshores, existeix una base ortonormal $\{\phi_n\}$ de H i un conjunt $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x, \phi_n)\phi_n \quad \forall x \in H. \qquad \square$$

La teoria espectral és fonamental per estudiar problemes d'evolució temporal i, sobretot, de bifurcació. Malauradament, els operadors diferencials no són compactes. Cal recórrer sovint als següents teoremes, més febles que l'anterior:

<u>Teorema</u>. Sigui $A \in L(H)$. Si $\exists \lambda_0 \in \mathrm{Resolv}(A)$ tal que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ és normal i compacte, llavors $\exists \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ i (P_n), resolució de la identitat, tals que $A = \sum \lambda_n P_n$ $\square$

<u>Teorema</u>. Sigui $A \in L(H)$ simètric, essent $\{\lambda_n\}$, $\{\phi_n\}$ una col·lecció d'autovalors i autovectors ortonormals d'A. Si $\{\phi_n\}$ és base d'H, llavors

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(A) \quad Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x, \phi_n)\phi_n. \qquad \square$$

6. ELEMENTS D'ANÀLISI FUNZIONAL NO LINEAL

6.1. Derivades de Fréchet i de Gâteaux

Siguin X, Y Banach $F : X \longrightarrow Y$ no lineal. Suposem que $\mathrm{dom}\, F$ és obert a X.

Definició. F és derivable en el sentit de Fréchet a $x_0 \in \mathrm{dom}\, F$ si existeix un operador lineal continu $F'(x_0)$ tal que

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)\, h + \omega(x_0, h) \quad \forall h \in X \mid \|h\| < \varepsilon$$

per a algun $\varepsilon > 0$, complint-se

$$\frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \quad \text{quan } \|h\| \to 0.$$

$F'(x_0) : X \longrightarrow Y$. Derivada de Fréchet

$h \longmapsto F'(x_0)h =: dF(x_0, h)$. Diferencial de Fréchet.

F és derivable Fréchet a un obert $S \subset \mathrm{dom}\, F$ si ho és $\forall x \in S$.

Definició. Suposem que $\forall h \in \mathrm{dom}\, F$ es compleix

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = DF(x_0, h) \quad , \; x_0 \in \mathrm{dom}\, F.$$

on $DF(x_0, \cdot) : X \longrightarrow Y$ és lineal. Aleshores, $DF(x_0, h)$ s'anomena diferencial de Gâteaux i $DF(x_0, \cdot)$ la derivada de Gâteaux.

Definició. Sigui $F : H \longrightarrow \mathbb{R}$ no lineal. Aleshores, si F és derivable Gâteaux $DF(x_0, \cdot) \in H'$ $\forall x_0 \in \mathrm{dom}\, F$ i, pel teorema de representació de Riesz (H Hilbert) existeix $\nabla F(x_0) \in H$

$$DF(x_0, h) = (\nabla F(x_0), h)$$

$\nabla F(x_0)$ s'anomena gradient d'F a x_0

Teorema. Si $F: X \to Y$ és diferenciable Fréchet a $x_0 \in \operatorname{dom} F$ aleshores és diferenciable Gâteaux i $F'(x_0) = DF(x_0, \cdot)$

Demostració

$$F(x_0 + th) - F(x_0) = F'(x_0)th + \omega(x_0, th), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0+th) - F(x_0)}{t} =: DF(x_0, h) = F'(x_0)h. \quad \square$$

Proposició. Suposem que $DF(x_0, \cdot)$ existeix en un entorn S de x_0 i és continu ($DF(x_0, \cdot) \in \mathcal{L}(X, Y)$). Aleshores, $DF(x_0, \cdot) = F'(x_0)$. $\square$

Considerem una família d'operadors

$$F(\cdot, \mu): X \longrightarrow Y, \quad \mu \in M \text{ Banach}.$$

Ens plantegem l'equació

$$F(x, \mu) = 0 \in Y,$$

per la qual cosa ens cal alguna generalització del teorema de la funció implícita.

Considerem l'entorn

$$N(x_0, r; \mu_0, \rho) := \{ x \in X, \mu \in M \mid \|x - x_0\| < r, \|\mu - \mu_0\| < \rho \}$$

Teorema. Suposem que

1) $F(x_0, \mu_0) = 0$
2) $F(x_0, \mu)$ és contínua respecte de μ a la bola $\|\mu - \mu_0\| < \rho_1$
3) $\exists\, r_1 > 0, \rho_1 > 0$ i $A: X \to Y$ continu i amb invers continu, tals que

$$\|F(x, \mu) - F(y, \mu) - A(x - y)\| \leq \alpha(r_1, \rho_1) \|x - y\|$$

$$\forall (x, \mu), (y, \mu) \in N(x_0, r_1; \mu_0, \rho_1), \text{ mentre}$$

$$\limsup_{r, \rho \to 0} |\alpha(r, \rho)| \, \|A^{-1}\| = q < 1.$$

Aleshores, existeix $r_0>0$, $\rho_0>0$ tals que a l'entorn $N(x_0, r_0; \mu_0, \rho_0)$ l'equació

$$F(x,\mu)=0$$

té una única solució $x(\mu)$, essent

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow X \\ \mu &\longmapsto x(\mu) \end{aligned}$$

contínua.

<u>Demostració</u>

$$F(x,\mu)=0 \iff x = K(x,\mu) \equiv x - A^{-1}F(x,\mu).$$

Vejam que K és contractiu en un entorn de (x_0, μ_0):

$$\|K(x,\mu)-K(y,\mu)\| = \|x-y - A^{-1}(F(x,\mu)-F(y,\mu))\|$$
$$\leq \|A^{-1}\| \, \|A(x-y) - (F(x,\mu)-F(y,\mu))\|$$
$$\leq \|A^{-1}\| \, |\alpha(r,\rho)| \, \|x-y\|$$
$$\leq (q+\varepsilon)\|x-y\|$$

on $q+\varepsilon<1$ si r,ρ són prou petits i $r<r_1$, $\rho<\rho_1$. A més:

$$\|K(x,\mu)-x_0\| \leq \|K(x,\mu)-K(x_0,\mu)\| + \|K(x_0,\mu)-x_0\|$$
$$\leq (q+\varepsilon)\|x-x_0\| + \|A^{-1}F(x_0,\mu)\|$$
$$\leq (q+\varepsilon)\|x-x_0\| + \|A^{-1}\| \, \|F(x_0,\mu)\|.$$

Com que $F(x_0,\mu) \to F(x_0,\mu_0)=0$ quan $\mu\to\mu_0$ tenim:

$\|A^{-1}\| \, \|F(x_0,\mu)\| \leq (1-q-\varepsilon) r_1$ quan $\|\mu-\mu_0\|\leq\rho_2$ per a algun $\rho_2<\rho_1$

$\therefore$ $\forall r_0<r_1$, $\rho_0<\rho_2$ la bola $\|x-x_0\|\leq r_0$ es transforma en ella mateixa quan $\|\mu-\mu_0\|\leq\rho_0$.

Pel th. de l'aplicació contractiva, $\exists\, x=x(\mu)$ a $N(x_0, r_0; \mu_0, \rho_0)$.

La continuïtat de $x(\mu)$ a μ_0 resulta de:

$$\|x(\mu)-x_0\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-q-\varepsilon}\|F(x_0,\mu)\| \qquad \square$$

Teorema (de la funció implícita) Suposem que

1) $F(x_0, \mu_0) = 0$
2) $\exists\, r>0,\ \rho>0$ tals que $F(x,\mu)$ és contínua a $N(x_0, r; \mu_0, \rho)$
3) $F_x(x,\mu)$ és contínua a (x_0, μ_0) $\quad (F_x(x,\mu) = F'(x,\mu)\ \mu$ fix$)$.
4) $F_x(x_0, \mu_0)$ té invers lineal continu.

Aleshores, $\exists\, r_0>0,\ \rho_0>0$ tals que $F(x,\mu)=0$ té una única solució $x = x(\mu)$ a $N(x_0, r_0; \mu_0, \rho_0)$. Si, a més

5) $F_\mu(x,\mu)$ és contínua a (x_0, μ_0)

llavors $x(\mu)$ té derivada de Fréchet a $\mu = \mu_0$ i

$$x'(\mu_0) = -F_x^{-1}(x_0,\mu_0) F_\mu(x_0,\mu_0). \qquad \square$$

6.2. Mètode de Liapunov - Schmidt

Definició. El punt (x_0,μ_0) és un punt regular de l'equació $F(x,\mu)=0$ si existeix un entorn $N(x_0, r; \mu_0, \rho)$ on hi ha una única solució $x = x(\mu)$ $\square$

El teorema de la funció implícita dóna condicions suficients perquè un punt sigui regular.

Definició. (x_0, μ_0) es diu punt de bifurcació de l'equació $F(x,\mu)=0$ si $\forall\, r>0, \rho>0$ a la bola $\|\mu-\mu_0\| \leq \rho$ $\exists\, \mu$ tal que a la bola $\|x - x_0\| \leq r$ hi ha almenys dues solucions x per al mateix μ. $\square$

Suposem que

$$F_x(x_0, \mu_0) = I - B : X \longrightarrow Y$$

on B és compacte. L'alternativa de Fredholm implica que

$I - B$ no és invertible amb continuïtat

$$\iff \exists\, x \neq 0 \mid (I-B)x = 0.$$

En aquesta situació no és aplicable el teorema de la funció implícita.

Suposem $x_0 = 0, \mu_0 = 0$ i $F(0,0) = 0$, amb $F : H \times M \longrightarrow H$, H Hilbert, M Banach, essent

$$F_x(0,0) = I - B_0 : H \to H$$

amb B_0 compacte. i auto-adjunt.

Escrivim $F(x,\mu)=0$ de la forma:

$$(I-B_0)x = -F(x,\mu) + (I-B_0)x \equiv R(x,\mu)$$

Volem estudiar la dependència de la solució x amb μ quan $\|\mu\|$ és petit i $\exists x \neq 0 \mid (I-B_0)x = 0$. Sigui:

$$N = \ker(I-B_0), \quad \dim N = n$$

$$N = \mathrm{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \quad \{\varphi_i\} \text{ base ortonormal.}$$

És fàcil veure que l'operador

$$\begin{aligned} Q_0 : H &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto Q_0 x := (I-B_0)x + \sum_{k=1}^{n} (x,\varphi_k)\varphi_k \end{aligned}$$

és invertible i l'invers és continu. Podem escriure:

$$(I-B_0)x = R(x,\mu) \iff$$

$$Q_0 x = R(x,\mu) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x,\varphi_k)}_{\alpha_k}\varphi_k = R(x,\mu) + P_N x$$

Escrivim

$$x = u + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \quad u \in N^{\perp}$$

Tindrem:

$$\begin{aligned} Q_0 x &= Q_0 u + (I-B_0)\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\Big) + P_N\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\Big) \\ &= Q_0 u + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k \\ &= R\Big(u + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k, \mu\Big) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k \end{aligned}$$

$$\therefore \quad Q_0 u = R\Big(u + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k, \mu\Big)$$

Podem considerar aquesta equació d'incògnita $u \in N^{\perp}$ i de paràmetres $(\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M \times \mathbb{R}^n$. És

$$R_x(0,0) = -F_x(0,0) + (I-B_0) = 0$$

$$\therefore \quad \Big(Q_0 u - R\Big(u + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k, \mu\Big)\Big)_u \Bigg|_{\substack{u=0 \\ \mu=0 \\ \alpha_i=0\ \forall i}} = Q_0$$

Podem aplicar el teorema de la funció implícita:

$$\exists!\ u = u(\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ per a } \|\mu\| \text{ i } |\alpha_k| \text{ prou petits.}$$

Els α_i es poden determinar imposant que

$$(u(\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \varphi_k) = 0 \qquad k = 1, \dots, n.$$

El nombre de solucions d'aquest sistema algebraic (no lineal) determina les solucions del problema original.

6.3. Punts crítics de funcionals

Sigui $\phi : H \to \mathbb{R}$.

Definició $x_0 \in H$ és un mínim local de $\phi(x)$ si $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$ $\phi(x) \geq \phi(x_0)$. De forma semblant es defineix màxim local. Màxims i mínims s'anomenen extrems locals. Si $\phi(x) \geq \phi(x_0)$ $\forall x \in H$, el mínim es diu absolut (i semblant per als màxims).

Teorema.

Sigui $\phi : H \to \mathbb{R}$ definida en un obert $S \subset H$ on existeix $\nabla\phi$ a $x = x_0 \in S$. Si x_0 és un extrem de ϕ, llavors $\nabla\phi(x_0) = 0$.

Demostració

$$0 = \frac{d}{dt}\phi(x_0 + th) = D\phi(x_0)\,h = (\nabla\phi(x_0), h) \quad \forall h \qquad \square$$

Definició Si $\nabla\phi(x_0) = 0$, x_0 s'anomena punt crític. $\square$

Definició Un funcional ϕ s'anomena creixent si

$$\lim_{R \to \infty} \inf_{\|x\| = R} \phi(x) = \infty. \qquad \square$$

Lema Sigui $Q \subset H$ feblement tancat i acotat. Si $\phi : H \to \mathbb{R}$ és feblement continu a Q, aleshores ϕ és acotat a Q i hi abasta els màxims i mínims.

Demostració. Suposem que ϕ no és acotat superiorment. Llavors, $\exists \{x_n\}$ tal que $\phi(x_n) \to \infty$ quan $n \to \infty$. Per hipòtesi, $\exists \{x_{n_k}\}$ feblement convergent a $x^* \in Q$, i per ser ϕ feblement continu, $\phi(x_{n_k}) \to \phi(x^*) \neq \infty$! Anàlogament es demostra que ϕ és acotat inferiorment.

Sigui $d = \inf_{x \in Q} \phi(x)$. $\exists \{z_n\} \mid \phi(z_n) \to d$. $\exists \{z_{n_k}\} \mid z_{n_k} \rightharpoonup z^* \in Q$ i $\phi(z_{n_k}) \to \phi(z^*) = d$. Anàleg si $d = \sup_{x \in Q} \phi(x)$. $\square$

Alguns problemes de la mecànica es poden plantejar com buscar els punts crítics del funcional
$$\psi(x) = \|x\|^2 + \phi(x)$$

<u>Definició</u>. Suposem que $\inf \phi(x) = d > -\infty$ a H. Una successió $\{x_n\}$ es diu <u>successió minimitzant</u> de $\phi(x)$ si $\phi(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} d$.

<u>Teorema</u>. Sigui $\psi(x) = \|x\|^2 + \phi(x)$, amb ϕ feblement contínua i ψ creixent. Aleshores:

1) $\exists x_0 \in H$ on ψ és mínim.
2) $\forall \{x_n\}$ minimitzant de ψ $\exists \{x_{n_k}\} \mid x_{n_k} \to x_0$ (fortament)
3) Si $\exists \nabla\phi(x_0)$, $2x_0 + \nabla\phi(x_0) = 0$.

<u>Mètode de Ritz</u>. Suposem que H és separable i sigui $\{g_i\}$ una base. Sigui $H_n = \operatorname{span}\{g_1, \dots, g_n\}$ i $x_n \in H_n$ tal que
$$\psi(x_n) \leq \psi(x) \quad \forall x \in H_n.$$
Si $\nabla\psi$ existeix, x_n es pot trobar resolent
$$(\nabla\psi(x_n), g_i) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n.$$

<u>Teorema</u>. En les condicions del teorema anterior:

1) $\forall n$, existeix solució al problema de minimitzar ψ a H_n.
2) $\{x_n\}$ és una successió minimitzadora de $\psi(x)$.
3) $\exists \{x_{n_k}\} \mid x_{n_k} \to x_0$, mínim de ψ a H.
4) Si el mínim de ψ és únic, $x_n \to x_0$.

<u>Demostració</u>. 1) és trivial. Per a 2), sigui
$$\psi(x_0) = d = \inf_{x\in H} \psi(x).$$
Considerem
$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (x_0, g_k)\, g_k$$
Serà:
$$\|x_0 - x^{(n)}\| = \delta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
Per ser $\psi(x)$ feblement contínua
$$|\psi(x_0) - \psi(x^{(n)})| = \varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
Però
$$\psi(x_0) \leq \psi(x_n) = \inf_{x\in H_n} \psi(x) \leq \psi(x^{(n)})$$
$$\therefore \quad |\psi(x_n) - \psi(x_0)| \leq |\psi(x^{(n)}) - \psi(x_0)| = \varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \square$$

6.4. Teoria del grau

La idea és extendre el següent resultat. Sigui $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, holomorfa a $D \subset \mathbb{C}$, D tancat, amb ∂D sense zeros de f. Aleshores:

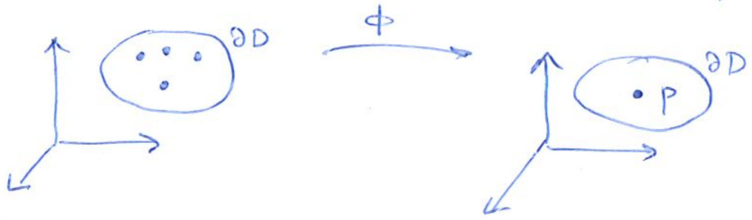
$$n = \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{nombre de zeros de } f \text{ a } D.$$

Sigui $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$x \mapsto \phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$$

Considerem $\phi \in C^1(D)$. Suposem que $p \notin \partial D$, que $\phi^{-1}(p)$ és discret i que

$$\forall x \in \phi^{-1}(p) \qquad J_\phi(x) = \det\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \neq 0$$



Es defineix

$$\deg(p, \phi, D) = \sum_{\substack{x \in D \\ \phi(x) = p}} \operatorname{sign} J_\phi(x)$$

Observem que

- $\deg(p, \phi, D) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in D \mid \phi(x) = p$.
- $p \notin D \Rightarrow \deg(p, \phi, D) = 0$.

Si $\phi(x) = p$ però $J_\phi(x) = 0$, suposem que $\exists \{p_k\}$ tal que $p_k \to p$ i $J_\phi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \phi^{-1}(p_k)$. Definim

$$\deg(p, \phi, D) = \lim_{k \to \infty} \deg(p_k, \phi, D).$$

Es pot demostrar que aquesta definició no depèn de $\{p_k\}$.

Si $\phi \in C^0(\bar{D})$ $(\notin C^1(D))$, considerem $\{\phi_k\} \subset C^1(D)$ tal que $\phi_k \to \phi$ uniformement. Definim:

$$\deg(p, \phi, D) = \lim_{k \to \infty} \deg(p, \phi_k, D)$$

Es pot demostrar que aquesta definició no depèn de $\{\phi_k\}$.

Volem extendre la definició de grau a operadors de la forma $I+F$, on

$$F : X \longrightarrow X \quad , \text{ compacte, } X \text{ Banach.}$$

Sigui D obert i acotat a X.

F compacte $\Rightarrow$ $F(\bar{D})$ compacte $\Rightarrow$ $\exists$ una ε-xarxa

$$N_\varepsilon = \{ x_k \mid x_k \in F(\bar{D}) \, , \, k = 1, \dots, n \}$$

serà

$$\forall x \in D \ \exists k \mid \| F(x) - x_k \| < \varepsilon .$$

Es defineix:

$$F_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mu_k(x) \, x_k}{\sum_{k=1}^{n} \mu_k(x)} \quad , \quad x \in \bar{D}$$

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \| F(x) - x_k \| > \varepsilon \\ \varepsilon - \| F(x) - x_k \| & \text{si } \| F(x) - x_k \| \leq \varepsilon . \end{cases}$$

F_ε s'anomena operador de projecció de Schauder. Es compleix:

- $\dim \operatorname{Im} F_\varepsilon < \infty$
- F_ε és continu.
- $\forall x \in \bar{D} \quad \| F(x) - F_\varepsilon(x) \| \leq \varepsilon$.

Siguin $X_n := \operatorname{Im} F_\varepsilon$, $D_n := D \cap X_n$. Si $p \notin \partial D_n$, podem definir $\deg(p, I + F_\varepsilon, D_n)$. Es compleix:

$$\exists \, \varepsilon_0 > 0 \mid \forall \, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0 \quad \deg(p, I + F_{\varepsilon_1}, D_{n_1}) = \deg(p, I + F_{\varepsilon_2}, D_{n_2}).$$

Es defineix:

$$\deg(p, I + F, D) = \deg(p, I + F_{\varepsilon_0}, D_{n_0}) .$$

Es compleixen les següents propietats:

1) Si $x + F(x) \neq p \Rightarrow \deg(p, I + F, D) = 0$.
2) Si $\deg(p, I+F, D) \Rightarrow \exists x \in D \mid x + F(x) = p$.
3) $\deg(p, I, D) = +1$ si $p \in D$.

4) Si $D = \bigcup_i D_i$, $D_i \cap D_j = \phi$, $\partial D_i \subset \partial D$, llavors

$$\deg(p, I+F, D) = \sum_i \deg(p, I+F, D_i)$$

5) Sigui $\phi(x,t) = x + \psi(x,t)$, $t \in [a,b]$, amb ϕ compacte respecte de $x \in X$ i uniformement continu respecte de $t \in [a,b]$. Si $p \neq x + \psi(x,t)$ per a cap $t \in [a,b]$, $x \in \partial D$, llavors

$$\deg(p, I + \psi(\cdot, a), D) = \deg(p, I + \psi(\cdot, b), D).$$

Teorema Sigui $F : X \to X$ compacte, X Banach. Suposem que

$$x + t F(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial B_R(0) \ , \ t \in [0,1].$$

Aleshores, $\exists x \in \mathring{B}_R(0)$ tal que

$$x + F(x) = 0$$

$$\deg(0, I + F, \mathring{B}_R(0)) = +1.$$

Demostració Per 5) i 3), $\deg(0, I+F, \mathring{B}_R(0)) = \deg(0, I, \mathring{B}_R(0)) = +1$.
Per 2), $\exists x \mid x + F(x) = 0$. $\square$

7. TEORIA DE SEMIGRUPS

A. Pazy. "Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations". Springer-Verlag, 1983.

D. Henry. "Geometric theory of semilinear parabolic equations". Springer-Verlag, 1989.

R. Dautray & J.L. Lions. "Mathematical analysis and Numerical methods for science and technology. Vol 5: Evolution problems I". Springer-Verlag, 2000.

Problema a considerar

$$t \geq 0 \quad \left.\begin{array}{r} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{array}\right\} , \qquad A : X \longrightarrow X \text{ lineal, } X \text{ Banach}$$

Problema ben posat si

1) $\exists!\ u(t)$ solució

2) $\|u(t)\|_X \leq C \|u_0\|_X$

Si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la solució és:

$$u(t) = e^{tA} u_0 \quad , \quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k$$

Dificultat si A és un operador diferencial: A és no fitat. Cal donar sentit a e^{tA}.

Definició Un semigrup continu en un espai de Banach X és una família d'operadors $\{\mathcal{U}(t), t \geq 0\}$, $\mathcal{U}(t) : X \to X$ tal que:

1) $\mathcal{U}(t+s) = \mathcal{U}(t)\,\mathcal{U}(s)$, $t, s \geq 0$.

2) $\mathcal{U}(0) = I$

3) $\mathcal{U}(t)x$ és continu en t per a $t = 0$:

$$\lim_{t \to 0^+} \|\mathcal{U}(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Aquí $\text{dom}(A) := \{x \in X \mid \exists \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(U(t)x - x)\}$.

$\forall x \in \text{dom } A$, definim:

$$Ax := \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[\mathcal{U}(t)x - x] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+} \mathcal{U}(t)x$$

$A : X \to X$ s'anomena <u>generador infinitesimal</u>.

<u>Obs.</u> En general $\mathcal{U}(t) \in L(X)$ és no fitat. I si ho és, A no té perquè ser-ho.

<u>Proposició</u> $\exists\, M > 0,\ \beta \geq 0$ tals que

$$\|\mathcal{U}(t)\| \leq M e^{t\beta}$$

<u>Conseqüència</u>

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\longrightarrow X \\ t &\longrightarrow U(t)x \end{aligned}$$

és contínua $\forall x \in X$.

<u>Def.</u> Si A és el generador infinitesimal de $\{\mathcal{U}(t)\}$ i $\|\mathcal{U}(t)\| \leq Me^{t\beta}$, direm que $\{\mathcal{U}(t)\}$ és de <u>tipus</u> (M, β) i $A \in G(X, M, \beta)$

<u>Teorema</u>

1) $\forall x \in X$, $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathcal{U}(s)x\, ds = U(t)x$

2) $A\left(\int_0^t \mathcal{U}(s)x\, ds\right) = \mathcal{U}(t)x - x$

3) $\frac{d}{dt} \mathcal{U}(t)x = A\,\mathcal{U}(t)x = \mathcal{U}(t)Ax$

4) $\mathcal{U}(t)x - \mathcal{U}(s)x = \int_s^t \mathcal{U}(r)Ax\, dr = \int_s^t A\,\mathcal{U}(r)x\, dr$

<u>Obs.</u> ~~En~~ A $\mathbb{R}^n$, si A és generador infinitesimal d'$\{\mathcal{U}(t)\}$, ha de ser $U(t) = e^{tA}$.

<u>Teorema</u> $\text{dom}(A)$ és <u>dens</u> a X i A és <u>tancat</u>.

Teorema. Sigui $c : \mathbb{R}^+ \to X$ de classe C^1, amb $c(t) \in \mathrm{dom}(A)$. Llavors:

$$\frac{dc}{dt} = Ac \Rightarrow c(t) = U(t)\, c(0).$$

Solucions febles. Donat $A : X \to X$, sigui $A' : X' \to X'$ el seu transpost (no el seu adjunt si X no és Hilbert). Suposem que

$$\left\langle \frac{dc}{dt}, v \right\rangle_{X \times X'} = \langle c(t), A'v \rangle_{X \times X'} \quad \forall v \in \mathrm{dom}\, A' \subset X',$$

la qual cosa és equivalent a

$$\langle c(t), v \rangle = \langle c(0), v \rangle + \int_0^t \langle c(s), A'v \rangle \, ds.$$

Aleshores $c(t)$ s'anomena solució feble del problema $\frac{dx}{dt} = Ax$.

Teorema. $c(t)$ és solució feble $\Leftrightarrow$ $c(t) = U(t)x_0$, amb $x_0 \in X$, no necessàriament $x_0 \in \mathrm{dom}\, A$.

Definició. Sigui $\{U(t)\}$ de tipus (M, β), i.e.,

$$\| U(t) \| \leq M e^{t\beta}$$

1) Si $\beta = 0$, el semigrup és fitat.
2) Si $M = 1$ el semigrup és quasi-contractiu.
3) Si $M = 1$ & $\beta = 0$ el semigrup és contractiu.

Teorema. Sigui $\{U(t)\}$ de tipus (M, β). Aleshores:

1) $T(t) = e^{-\beta t} U(t)$ és fitat i el seu generador és $A - \beta I$.
2) Existeix $|||\cdot|||$ tal que

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq c'\|x\| \quad \forall x \in X$$

$$|||U(t)||| \leq e^{t\beta'} \quad (\{U(t)\} \text{ és quasi-contractiu}).$$

Teorema

$$\lim_{t \to 0} \|U(t) - I\| = 0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}(X) \quad (A \text{ lineal continu}).$$

<u>Teorema</u>. Sigui $A \in G(X, M, \beta)$. Aleshores:

1) dom A és dens a X.
2) $\forall \lambda > \beta$, $\lambda \notin \mathrm{Spec}(A)$ i $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ és lineal fitat.
3) $\| (\lambda I - A)^{-n} \| \leq \dfrac{M}{(\lambda - \beta)^n}$ $\forall \lambda > \beta$, $n = 1, 2, \ldots$

<u>Teorema</u> (Hille-Yosida). Recíproc del teorema anterior.

Sigui $A : X \to X$ lineal. Suposem que

1) dom A és dens a X
2) $\exists \beta > 0 \mid \forall \lambda > \beta \quad (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$
3) $\exists M > 0 \mid \| (\lambda I - A)^{-n} \| \leq \dfrac{M}{(\lambda - \beta)^n}$ $\forall \lambda > \beta$, $n = 1, 2, \ldots$

Aleshores, $A \in G(X, M, \beta)$.

<u>Obs</u>. Aquest és un teorema d'existència per al problema $\frac{du}{dt} = Au$, $u(0) = u_0$. Si es verifiquen les hipòtesis, A serà el generador infinitesimal d'$\{U(t)\}$ i $u(t) = U(t) u_0$ serà solució del problema buscat. S'escriu $U(t) = e^{tA}$.

<u>Definició</u>. A és <u>tancable</u> si la clausura de la gràfica d'A a $X \times X$, $(\mathrm{dom}\, A, A(\mathrm{dom}\, A) = \mathrm{Im}\, A)$, és la gràfica d'un operador, que s'indica $\overline{A}$, <u>clausura</u> d'A.

<u>Corol·lari 1</u> (al thm. de Hille-Yosida). $\overline{A} \in G(X, 1, \beta)$ $\Longleftrightarrow$ es compleix:

1) dom A és dens a X.
2) $\exists \beta > 0 \mid \forall \lambda > \beta$

$\mathrm{Im}(\lambda I - A)$ és dens i $\| (\lambda I - A) x \| \geq (\lambda - \beta) \| x \|$

<u>Corol·lari 2</u> (Lumer-Philips). Sigui $A \in L(H)$, H Hilbert.
A és tancable i $\bar{A} \in G(H, 1, \beta) \iff$

1) dom A és dens a H,
2) $(Ax, x) \leq \beta \|x\|^2$ $\forall x \in$ dom A per a algun $\beta \in \mathbb{R}$
3) $\mathrm{Im}(\lambda I - A)$ és dens a H per a λ prou gran.
3') si $\mathrm{Im}(\lambda I - A) = H \Rightarrow A = \bar{A} \in G(H, 1, \beta)$.

<u>Teoremes addicionals</u>.

1) si $A \in G(X, M, \beta)$, $B \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow A + B \in G(X, M, \beta + \|B\| M)$
2) $$\left.\begin{array}{l} A_n \in G(X, M, \beta) \ \forall n = 1, 2, \dots \\ A \in G(X, M, \beta) \\ \exists \lambda_0 \mid \forall \lambda > \lambda_0 \ \lim_{n \to \infty} \|(\lambda I - A_n)^{-1} - (\lambda I - A)^{-1}\| = 0 \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to 0} \| e^{tA_n} - e^{tA} \| = 0,$$
3) (teorema d'equivalència de Lax). Sigui $A \in G(X, M, \beta)$ i $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, $K_0 = I$. Diem que $\{K_\varepsilon\}$ és
   a) <u>estable</u> si $\|K^n_{t/n}\| \leq M_K < \infty$ $\forall t \in [0, T]$, $\forall n = 1, 2, \dots$
   b) de <u>resolvent consistent</u> si $\exists \lambda_0 \mid \forall \lambda \geq \lambda_0$
   $$(\lambda I - A)^{-1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\lambda I - \frac{1}{\varepsilon}(K_\varepsilon - I)\right)^{-1}$$
   c) <u>consistent</u> si $\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0^+} K_\varepsilon x = Ax$

Aleshores:
$$e^{tA} = \lim_{n \to \infty} K^n_{t/n} \iff K_\varepsilon \text{ estable \& de resolvent consistent.}$$
$$\Uparrow$$
$$K_\varepsilon \text{ estable \& consistent}$$

4) Fórmula del producte de Trotter. Si A, B són generadors infinitesimals i $C = \overline{A + B}$ també, llavors
$$e^{tC} = \lim_{n \to \infty} \left(e^{\frac{tA}{n}} e^{\frac{tB}{n}}\right)^n$$

5) Equacions no homogènies (fórmula de variació de les constants)

Sigui $A \in G(X, M, \beta)$ i considerem el problema:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f \quad , \quad 0 < t \leq T$$

$$x(0) = x_0 \in \text{dom}\, A .$$

Si $f \in C^1(0,T;X)$, aleshores aquest problema té solució única i ve donada per

$$x(t) = e^{tA} x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau)\, d\tau \quad , \quad 0 \leq t \leq T.$$

6) Sigui $A \in G(X, 1, \beta)$ i suposem que $\exists \delta > 0 \mid$

$$\text{Spec}(e^A) \subset B_{1-\delta}(0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1-\delta \}$$

Aleshores

$$\forall x \in X \qquad \lim_{t \to \infty} \| e^{tA} x \| = 0 .$$

<u>Resultats addicionals d'operadors en espais de Hilbert</u>

1) (Teorema de Stone) $A = A^* \iff iA$ genera un grup uniparamètric unitari $\{U(t)\}$ $(U^*(t) = U^{-1}(t) \ \forall t)$

2) $A = -A^* \iff A$ genera un grup uniparamètric d'isometries.

3) A <u>dissipativa</u> $\left((Ax, x) \leq 0 \ \forall x \in X \right)$ i $A = A^*$ $\Rightarrow A \in G(H, 1, 0)$ (semigrup contractiu).

<u>Exemple</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $X = L^2(\Omega)$, $Au = \Delta u$, $\text{dom}\, A = C_0^\infty(\Omega)$. Aleshores, $\bar{A}$ genera un semigrup contractiu de X ($\bar{A}$ és el laplacià definit a $\text{dom}(\bar{A}) = H_0^2(\Omega)$).