Aula PAYMACOTAS. Barcelona, 10.12.2009

Mecánica de Rocas Aplicada a Túneles:

Homenaje a Alcibíades Serrano

CURVAS DE CONVERGENCIA EN MATERIALES ELASTOPLÁSTICOS

J. Alcoverro

Euro Geotecnica, SA

Av. de les Corts Catalanes, 5-7
08173 Sant Cugat del Vallès

UPC, Dep. Ing. Terreno

Jordi Girona 1-3, D-2
08034 Barcelona

Esquema de la presentación

1 Introducción
2 Planteamiento del problema
3 Primera reducción del problema
4 Segunda reducción del problema
5 Conclusiones

1 Introducción

1 Introducción
1.1 Método convergencia - confinamiento
1.2 Coordenadas y convenio de signos
2 Planteamiento del problema
3 Primera reducción del problema
4 Segunda reducción del problema
5 Conclusiones

1.1 Método convergencia-confinamiento (1/2)

Hipótesis habituales

- Túnel circular
- Macizo infinito
- Material homogéneo e isótropo
- Estado inicial homogéneo e isótropo
- Desplazamientos perpendiculares al eje del túnel
- Ausencia de gravedad
- La excavación del túnel se simula disminuyendo de forma monótona la presión en la pared del túnel

Nota : Estas hipótesis implican un estado de deformación plana en planos perpendiculares al eje del túnel y simetría de revolución alrededor del eje del túnel.

1.1 Método convergencia-confinamiento (2/2)

En el plano desplazamiento radial - presión se representan :

- La curva de convergencia del macizo
  Relaciona la presión aplicada a la pared del túnel con el desplazamiento radial inducido en la pared del túnel.
- La curva de confinamiento del sostenimiento
  Relaciona la presión aplicada en el trasdós del sostenimiento con el desplazamiento radial inducido en el sostenimiento. Se desplaza paralelamente al eje de los desplazamientos radiales sumando el valor del desplazamiento del túnel durante la excavación sin sostenimiento (efecto frente).

La intersección de estas curvas corresponde al desplazamiento final de la pared del túnel y a la presión de interacción entre el macizo y el sostenimiento.

1.2 Coordenadas y convenio de signos

- Coordenadas espaciales
  En un principio, se usa un sistema de coordenadas cartesianas cuyo eje de las z coincide con el eje del túnel. Posteriormente, se usa un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z), cuyo eje de las z coincide con el eje del túnel. Para vectores y tensores, se usarán las componentes físicas asociadas a estos sistemas de coordenadas.
- Convenio de signos
  Se asignarán valores positivos a las deformaciones de extensión y a las tensiones de tracción. Sin embargo, se asignarán valores positivos a las presiones cuando sean de compresión.

2 Planteamiento del problema

1 Introducción
2 Planteamiento del problema
2.1 Ecuaciones constitutivas
2.2 Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad
2.3 Problema
3 Primera reducción del problema
4 Segunda reducción del problema
5 Conclusiones

2.1 Ecuaciones constitutivas (1/2)

material elastoplástico con m superficies de fluencia suaves

variables internas	$\varepsilon^p \in \mathbb{S},\ \ \xi \in \mathbb{R}^n$
criterios de fluencia	$f_\alpha : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$
descomp. deformaciones	$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ (def. infinitesimales)
respuesta tensional	$\sigma = T(\varepsilon^e)$
condiciones de Kuhn - Tucker	$f_\alpha(\sigma, \xi) \le 0$
	$\lambda_\alpha \ge 0$
	$f_\alpha(\sigma, \xi) \cdot \lambda_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$
flujo plástico (Koiter)	$\dot{\varepsilon}^p = \sum_{\alpha=1}^{m} m_\alpha(\sigma, \xi) \lambda_\alpha$
reglas de endurecimiento	$\dot{\xi} = \sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha(\sigma, \xi) \lambda_\alpha$
consistencia plástica	$\dot{f}_\alpha(\sigma, \xi) \cdot \lambda_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$

2.1 Ecuaciones constitutivas (2/2)

estados admisibles

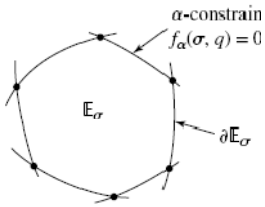
$\mathbb{E}_\sigma = \{(\sigma,\xi) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^n \mid f_\alpha(\sigma,\xi) \le 0$ para cada $\alpha = 1,\ldots,m\}$

requisitos adicionales

$f_\alpha(\sigma,\xi) = 0$ son m restric. indep. en $\partial\mathbb{E}_\sigma$

$E^e_{ijkl}(\varepsilon^e) = \partial T_{ij} / \partial \varepsilon^e_{kl}$ def. posit.

$g_{\alpha\beta}(\varepsilon,\varepsilon^p,\xi) = \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} E^e_{ijkl} m_{\beta kl} - \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \xi_I} h_{\beta I}$ def. posit.



comportamiento incremental

$\dot{\sigma}_{ij} = E^e_{ijkl}(\varepsilon^e) \times (\dot{\varepsilon}_{kl} - \sum_\alpha \lambda_\alpha m_{\alpha kl}) = E^{ep}_{ijkl}(\varepsilon,\varepsilon^p,\xi)\dot{\varepsilon}_{kl}$

cada $\lambda_\alpha > 0$ añade una modificación de rango 1 a $E^e_{ijkl}(\varepsilon^e)$

$\mathbb{J}_{act}$ - regiones

regiones del espacio con el mismo conjunto $\mathbb{J}_{act}$ de λ_α positivos

2.2 Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad

condiciones

sin fuerzas de volumen ni aceleraciones

componente paralela al túnel del desplazamiento $u_z(x,t)$ nula

en el interior de una $\mathbb{J}_{act}$ - región

equilibrio $\sigma_{ij,j}(x,t) = 0$

compat. deformaciones $e_{mjq} e_{nir} \varepsilon_{ij,qr}(x,t) = 0$

(e_{ijk} símbolo de permutación de Levi - Civita)

en la frontera entre dos $\mathbb{J}_{act}$ - regiones

equilibrio (Kotchine) $n_j(x,t) = 0$

compat. (Hadamard) $[\![\varepsilon_{ij}(x,t)]\!] = c_i(x,t) n_j(x,t) + c_j(x,t) n_i(x,t)$

Nota: En $\mathbb{J}_{act}$ - regiones contiguas la respuesta incremental es distinta, por lo que, en general, ni $\varepsilon(x,t)$ ni $\sigma(x,t)$ serán diferenciables en su frontera.

2.3 Problema

dominio	funciones incógnita
$\{(x,t) \mid r_i \le r(x), 0 \le t \le T\}$	$\varepsilon_{ij}(x,t),\ \varepsilon^p_{ij}(x,t),\ \xi_I(x,t)$
en una $\mathbb{J}_{act}$ -región	en la frontera de dos $\mathbb{J}_{act}$ -regiones
$E^{ep}_{ijkl} \times (\varepsilon_{kl,j} - \varepsilon^{p}_{kl,j}) = 0$	$[\![\sigma_{ij}]\!] n_j = 0$
$e_{mjq} e_{nir} \varepsilon_{ij,qr} = 0$	$[\![\varepsilon_{ij}]\!] = c_i n_j + c_j n_i$
$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \sum_\alpha m_{ij\alpha} \lambda_\alpha$	
$\dot{\xi}_I = \sum_\alpha h_{I\alpha} \lambda_\alpha$	
condiciones iniciales	condiciones de contorno
$\varepsilon_{ij}(x,0) = 0,\ \ \varepsilon^p_{ij}(x,0) = 0,$	$r(x) = r_i \quad \sigma_{ij}(x,t) n_j(x) = -p(t) n_i(x)$
$(\Rightarrow \sigma_{ij}(x,0) = -p^0 \delta_{ij})$	$r(x) = \infty \quad \sigma_{ij}(x,t) = -p^0 \delta_{ij}$
$\xi_I(x,0) = \xi^0_I$	$(p(0) = p^0, \quad dp/dt(t) < 0 \quad t \in [0,T])$

las $\mathbb{J}_{act}$ -regiones evolucionan $\quad r_i =$ radio túnel, $p^0 =$ presión inicial

3 Primera reducción del problema

1 Introducción
2 Planteamiento del problema
3 Primera reducción del problema
3.1 Homogeneidad del material
3.2 Isotropía del material
3.3 Forma reducida de las soluciones
3.4 Problema reducido
4 Segunda reducción del problema
5 Conclusiones

3.1 Homogeneidad del material

Debido a la homogeneidad del material, si las funciones

$$\varepsilon = F(r,\theta,z,t), \quad \varepsilon^p = G(r,\theta,z,t), \quad \xi = H(r,\theta,z,t)$$

son una solución general del problema (sin cond. iniciales ni de contorno) entonces, para todo $\delta \in \mathbb{R}$, las funciones

$$\varepsilon = F(r,\theta,z+\delta,t), \quad \varepsilon^p = G(r,\theta,z+\delta,t), \quad \xi = H(r,\theta,z+\delta,t)$$

también son una solución general del problema. Si, para todo $\delta \in \mathbb{R}$, estas soluciones coinciden, entonces esta solución tiene simetría de traslación y debe ser de la forma

$$\varepsilon = F(r,\theta,t), \quad \varepsilon^p = G(r,\theta,t), \quad \xi = H(r,\theta,t)$$

con lo que depende de una variable menos.

Nota: Esta simetría es compatible con $u_z(r,\theta,z,t) = 0$, ya que

$u_z(r,\theta,z,t) = 0 = u_z(r,\theta,z+\delta,t)$ para todo $\delta \in \mathbb{R}$.

3.2 Isotropía del material

Debido a la isotropía del material, si las funciones

$$\varepsilon = F(r,\theta,z,t), \quad \varepsilon^p = G(r,\theta,z,t), \quad \xi = H(r,\theta,z,t)$$

son una solución general del problema (sin cond. iniciales ni de contorno) entonces, para todo $\delta \in \mathbb{R}$, las funciones

$$\varepsilon = F(r,\theta+\delta,z,t), \quad \varepsilon^p = G(r,\theta+\delta,z,t), \quad \xi = H(r,\theta+\delta,z,t)$$

también son una solución general del problema. Si, para todo $\delta \in \mathbb{R}$, estas soluciones coinciden, entonces esta solución tiene simetría de rotación y debe ser de la forma

$$\varepsilon = F(r,z,t), \quad \varepsilon^p = G(r,z,t), \quad \xi = H(r,z,t)$$

con lo que depende de una variable menos.

Nota: Esta simetría es compatible con la simetría de traslación considerada previamente.

3.3 Forma reducida de las soluciones

La compatibilidad de las condiciones iniciales y de contorno con las simetrías de traslación y rotación motivan la búsqueda de soluciones del problema de la forma

$$\varepsilon = F(r,t), \quad \varepsilon^p = G(r,t), \quad \xi = H(r,t)$$

que dependen de dos variables menos.

El problema también tiene simetría respecto de cualquier plano que pasa por el eje del túnel, por lo que buscaremos soluciones que tengan estas mismas simetrías. En este caso, en cada punto, el vector u será radial (recordar la condición $u_z = 0$) y los tensores $\varepsilon, \varepsilon^p$ y σ tendrán las direcciones radial, tangencial y axial como direcciones principales. El tensor de deformaciones es

$$\varepsilon_{rr}(r,t) = u_{r,r}(r,t), \quad \varepsilon_{\theta\theta}(r,t) = u_r(r,t)/r, \quad \varepsilon_{zz}(r,t) = 0$$

Por tanto, tenemos deformación plana y simetría de rotación.

3.4 Problema reducido

dominio	funciones incógnita
$\{(r,t) \mid r_i \le r(x), 0 \le t \le T\}$	$\varepsilon_{rr}(r,t), \varepsilon_{\theta\theta}(r,t), \varepsilon^p_{ii}(r,t), \xi_I(r,t)$
en una $\mathbb{J}_{act}$ - región	en la frontera de dos $\mathbb{J}_{act}$ - regiones
$\sigma_{rr,r} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r = 0$	$[\![\sigma_{ii}]\!] = 0$ (σ debe ser continuo)
$\varepsilon_{\theta\theta,r} - (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta})/r = 0$	$[\![\varepsilon_{rr}]\!] = c_r$ (ε puede no ser continuo)
$\dot{\varepsilon}^p_{ii} = \sum_\alpha m_{ii\alpha}\lambda_\alpha$	(ε^p puede no ser continuo)
$\dot{\xi}_I = \sum_\alpha h_{I\alpha}\lambda_\alpha$	(ξ puede no ser continuo)
condiciones iniciales	condiciones de contorno
$\varepsilon_{ii}(r,0) = 0, \ \varepsilon^p_{ii}(r,0) = 0$	$\sigma_{ii}(\infty,t) = -p^0$
$(\Rightarrow \sigma_{ii}(r,0) = -p^0)$	$\sigma_{rr}(r_i,t) = -p(t)$
$\xi_I(r,0) = \xi^0_I$	$(p(0) = p^0, \quad dp/dt(t) < 0 \quad t \in [0,T])$
las $\mathbb{J}_{act}$ - regiones evolucionan	sin suma, $ii \in \{rr, \theta\theta, zz\}$

4 Segunda reducción del problema

1 Introducción
2 Planteamiento del problema
3 Primera reducción del problema
4 Segunda reducción del problema
4.1 Autosimilitud
4.2 Impedimentos a la reducción del problema
4.3 Rate independence
4.4 Problemas equivalentes al original
4.5 Transformación y reducción del problema
4.6 Problema transformado y reducido
4.7 Soluciones del problema original
4.8 Propiedades de las soluciones obtenidas
5 Conclusiones

4.1 Autosimilitud

Debido a la forma de la ecuación constitutiva, si las funciones

$$\varepsilon = F(r,\theta,z,t), \quad \varepsilon^p = G(r,\theta,z,t), \quad \xi = H(r,\theta,z,t)$$

son una solución general del problema (sin cond. iniciales ni de contorno) entonces, para todo $\delta \in \mathbb{R}^+$, las funciones

$$\varepsilon = F(r\delta,\theta,z\delta,t\delta), \quad \varepsilon^p = G(r\delta,\theta,z\delta,t\delta), \quad \xi = H(r\delta,\theta,z\delta,t\delta)$$

también son una solución general del problema. Si, para todo $\delta \in \mathbb{R}^+$, estas soluciones coinciden, entonces esta solución es autosimilar y debe ser de la forma

$$\varepsilon = F(r/t,\theta,z/t), \quad \varepsilon^p = G(r/t,\theta,z/t), \quad \xi = H(r/t,\theta,z/t)$$

con lo que depende de una variable menos.

Nota : esta simetría es compatible con la simetría de traslación y la simetría de rotación consideradas previamente.

4.2 Impedimentos a la reducción del problema

La compatibilidad de las condiciones iniciales y de contorno con las simetrías de traslación, rotación y autosimilitud motivarían la búsqueda de soluciones del problema de la forma

$$\varepsilon = F(r/t), \quad \varepsilon^p = G(r/t), \quad \xi = H(r/t)$$

Las condiciones iniciales y de contorno son compatibles con las simetrías de traslación y de rotación, pero no son compatibles con la autosimilitud, ya que ni la condición de contorno en la pared del túnel ni el dominio espacial lo son.

Sin embargo, usando la independencia de la respuesta material a la velocidad de deformación (rate independency), es posible transformar el problema en otro problema con dichas simetrías, reducir este problema y usar soluciones del mismo para hallar soluciones del problema original.

4.3 Rate independence

Al ser la respuesta material "rate independent" e irreversible, dada una solución general de un problema cuasiestático

$$\varepsilon = F(r,\theta,z,t), \quad \varepsilon^p = G(r,\theta,z,t), \quad \xi = H(r,\theta,z,t)$$

que satisface las condiciones iniciales y de contorno

$t = t_0 \qquad \varepsilon = F^0(r,\theta,z), \quad \varepsilon^p = G^0(r,\theta,z), \quad \xi = H^0(r,\theta,z)$

$t \in [t_0, t_1] \qquad u = U(r,\theta,z,t)$ en Ω_u, $s = S(r,\theta,z,t)$ en Ω_s

entonces, para cualquier $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ tal que $df/dt(t) > 0$,

$$\varepsilon = F(r,\theta,z,f(t)), \quad \varepsilon^p = G(r,\theta,z,f(t)), \quad \xi = H(r,\theta,z,f(t))$$

también es una solución general que satisface las condiciones

$t = f(t_0) \qquad \varepsilon = F^0(r,\theta,z), \quad \varepsilon^p = G^0(r,\theta,z), \quad \xi = H^0(r,\theta,z)$

$t \in [f(t_0), f(t_1)] \qquad u = U(r,\theta,z,f(t))$ en Ω_u, $s = S(r,\theta,z,f(t))$ en Ω_s

Por tanto, las condiciones iniciales y de contorno originales y las transformadas definen problemas elastoplásticos equivalentes.

4.4 Problemas equivalentes al original

Los problemas equivalentes al problema original se caracterizan por tener una presión aplicada a la pared del túnel $p:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}$ tal que

$$p(t_0)=p^0,\ p(t_1)=P \text{ y } dp/dt\,(t)<0\ (t_0\le t\le t_1)$$

es decir, por el valor inicial p^0, el valor final P y disminuir de forma monótona.

Con la transformación del problema original que se realizará, se obtendrá un problema con autosimilitud que será posible reducir y, a partir de una solución de este último problema que cumpla ciertas condiciones, se obtiene una solución de un problema que es equivalente al problema original.

4.5 Transformación y reducción del problema

Transformemos el problema modificando sólo el dominio y las condiciones de contorno de la siguiente forma

dominio	condiciones de contorno
$\{(r,t)\,\vert\,0\le c\cdot t\le r\}$	$\sigma_{ii}(\infty,t)=-p^0$
	$\sigma_{rr}(c\cdot t,t)=-P$

las $\mathbb{J}_{act}$ - regiones evolucionan sin suma, $ii\in\{rr,\theta\theta,zz\}$

Es decir, se trata de un dominio con un orificio circular de radio $c\cdot t$ que aumenta con el tiempo a velocidad constante c y a cuyo contorno se le aplica la presión constante P. Dado que ahora el problema tiene autosimilitud, buscaremos soluciones de la forma

$$\varepsilon=F(\rho),\quad \varepsilon^p=G(\rho),\quad \xi=H(\rho)\quad \text{con}\quad \rho=r/(c\cdot t)$$

y se ha incluido la constante c para que ρ sea adimensional.

4.6 Problema transformado y reducido

dominio	funciones incógnita
$\{\rho \mid \rho \geq 1\}$	$\varepsilon_{rr}(\rho), \varepsilon_{\theta\theta}(\rho), \varepsilon_{ii}^{p}(\rho), \xi_I(\rho)$
en una $\mathbb{J}_{act}$ - región	en la frontera de dos $\mathbb{J}_{act}$ - regiones
$\sigma'_{rr} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/\rho = 0$	$[\![\sigma_{ii}]\!] = 0$
$\varepsilon'_{\theta\theta} - (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta})/\rho = 0$	$[\![\varepsilon_{rr}]\!] = 0 \;\; (\Leftarrow [\![\sigma_{ii}]\!] = [\![\varepsilon_{ii}^{p}]\!] = [\![\varepsilon_{\theta\theta}]\!] = 0)$
$\varepsilon'^{p}_{ii} = \sum_{\alpha} m_{ii\alpha}\lambda_{\alpha}$	$[\![\varepsilon_{ii}^{p}]\!] = 0 \;\; (\Leftarrow$ cont. resp. t de $\varepsilon_{ii}^{p}(r/c\cdot t))$
$\xi'_I = \sum_{\alpha} h_{I\alpha}\lambda_{\alpha}$	$[\![\xi_I]\!] = 0 \;\; (\Leftarrow$ cont. resp. t de $\xi_I(r/c\cdot t))$
condiciones iniciales	condiciones de contorno
$\varepsilon_{ii}(\infty) = 0, \;\; \varepsilon_{ii}^{p}(\infty) = 0$	$\sigma_{rr}(1) = -P$
$(\Rightarrow \sigma_{ii}(\infty) = -p^0)$	$\sigma_{ii}(\infty) = -p^0$
$\xi_I(\infty) = \xi_I^0$	

las $\mathbb{J}_{act}$ - regiones están fijas

sin suma, $ii \in \{rr, \theta\theta, zz\}$

4.7 Soluciones del problema original

Dada una solución del problema transformado reducido

$$\varepsilon = F(\rho), \quad \varepsilon^p = G(\rho), \quad \xi = H(\rho) \Rightarrow \sigma = S(\rho)$$

en $\rho \geq 1$ tal que

$\varepsilon(\infty) = 0; \quad \varepsilon^p(\infty) = 0; \quad \xi(\infty) = \xi^0$

$\sigma_{ii}(\infty) = -p^0; \quad \sigma_{rr}(1) = -P$

si $dS_{rr}/d\rho(\rho) < 0$ $(\rho \geq 1)$, se tiene la solución del problema original

$\varepsilon = F(r/(c\cdot t)), \quad \varepsilon^p = G(r/(c\cdot t)), \quad \xi = H(r/(c\cdot t)) \Rightarrow \sigma = S(r/(c\cdot t))$

en $r \geq r_i, \quad 0 \leq t \leq T \quad (T = r_i/c)$ tal que

$\varepsilon(r,0) = 0; \quad \varepsilon^p(r,0) = 0; \quad \xi(r,0) = \xi^0$

$\sigma_{ii}(\infty,t) = -p^0; \quad \sigma_{rr}(r_i,t) = -p(t)$

con $p(t) = -S_{rr}(r_i/(c\cdot t))$, $p(0) = p^0$, $p(T) = P$ y $dp/dt(t) < 0$ $(0 \leq t \leq T)$.

sin suma, $ii \in \{rr, \theta\theta, zz\}$

4.8 Propiedades de las soluciones (1/2)

- Las soluciones $\varepsilon(r,t)$, $\varepsilon^p(r,t)$ y $\xi(r,t)$ son funciones continuas en las fronteras entre dos $\mathbb{J}_{act}$ – regiones.
- las evoluciones (r fijo, t variable) y las distribuciones (t fijo, r variable) de las variables ε, ε^p y ξ, así como de las que sean funciones de ellas, tales como σ o ε^e, están relacionadas entre sí, de forma que si conocen unas se conocen las otras.
- En cada instante de tiempo t, la tensión radial σ_{rr} (tracción +) decrece con el radio r.
- En cada punto r y en cada instante de tiempo t, la tensión radial σ_{rr} es mayor que la tensión circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ (tracción +).
- Si, partiendo de un estado inicial elástico, se llega a alcanzar la condición de fluencia en en algún punto del dominio espacial dicha condición se alcanza por primera vez en la pared del túnel.

4.8 Propiedades de las soluciones (2/2)

- Dado $\sigma_{rr}*$ tal que $-P \le \sigma_{rr}* \le -p^0$, para cada t tal que $0 \le t \le T$, existe un único punto $r*(t)$ tal que $\sigma_{rr}(r*(t),t) = \sigma_{rr}*$. Además, $(dr*/dt)(t) > 0$ para $0 \le t \le T$.
- Dado $\sigma_{rr}*$ tal que $-P \le \sigma_{rr}* \le -p^0$, sea $r*(t)$ el único punto tal que $\sigma_{rr}(r*(t),t) = \sigma_{rr}*$. La función $\tilde{t} = r*(t)/c$ transforma el problema en un problema equivalente e induce la transformación $\tilde{\rho} = \rho / S^{-1}(\sigma_{rr}*)$, donde $\tilde{\rho} = r/(c\cdot\tilde{t})$ y $\sigma_{rr}(r,t) = S(r/(c\cdot t))$. Además, $\sigma_{rr}* = \tilde{S}(1)$, donde $\tilde{S}(r/(c\cdot\tilde{t})) = S(r/(c\cdot t))$.

Nota: Si $\sigma_{rr}*$ es igual al valor en el que se alcanza la condición de fluencia, entonces $r*(t)$ es el radio de plastificación. Por lo tanto, la transformación $t \to r*(t)/c$ es tal que la frontera elastoplástica se mueve con velocidad constante igual a c.

5 Conclusiones

- Las soluciones del problema general son funciones de cuatro variables $(r, \theta, z\ t)$.
- Las hipótesis del método convergencia - confinamiento permiten reducir el número de variables independientes a dos (r, t).
- Las propiedades de los materiales elastoplásticos permiten reducir el número de variables independientes a uno $(\rho = r/c \cdot t)$.
- La forma de las soluciones obtenidas permite enunciar algunas propiedades de las mismas.