

**CURVAS DE CONVERGENCIA:
EFECTO DE ALGUNOS MODELOS CONSTITUTIVOS
AVANZADOS**

Isabel Reig
ETSICCP - UPM

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

1.- INTRODUCCIÓN

2.- FACTORES QUE INFLUYEN EN LA OBTENCIÓN DE LA CURVA DE CONVERGENCIA DE UN MACIZO ROCOSO

- Criterio de rotura
- Comportamiento post-rotura
- Ley de Fluencia

3.- FORMULACIÓN ANALÍTICA GENERAL: MACIZOS ELASTOPLÁSTICOS

4.- COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIONES

BIBLIOGRAFÍA

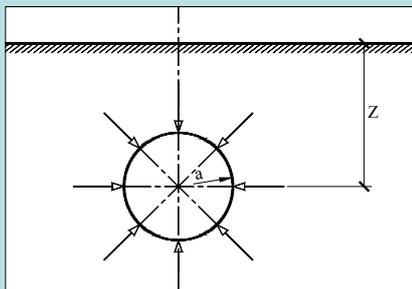
Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

INTRODUCCIÓN

- El diseño del sostenimiento en túneles es un proceso laborioso y complejo debido:
 - A la dificultad que presenta la caracterización geomecánica del macizo
 - A la imposibilidad de encontrar unos modelos matemáticos capaces de simular toda su complejidad y la de los mecanismos que rigen su respuesta frente a la realización de una excavación subterránea.
- Es importante durante la fase de construcción llevar un control de la auscultación y un seguimiento geológico-geotécnico de la excavación que confirme la validez de los cálculos realizados durante la fase de proyecto.

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA



Túnel situado a una profundidad $z > 2 \cdot \phi$
Macizo homogéneo, isótropo y continuo

El estado tensional inicial depende:

- De la carga de montaña ($p_0 = \gamma \cdot z$)
- Del proceso de génesis
- De la historia geológica

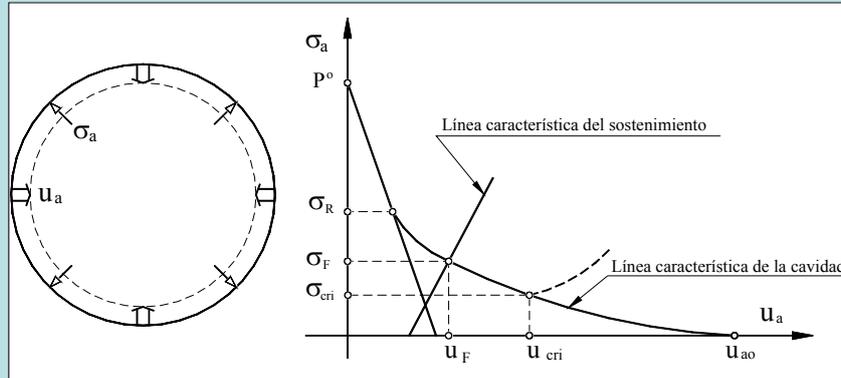
La excavación produce un cambio en el estado tensional que depende:

- Forma y dimensiones de la excavación
- Pérdida de confinamiento

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

CURVA CARACTERÍSTICA DEL TERRENO (O DE LA CAVIDAD)

Isotropía → Forma, Material y Carga



Curva Característica del Túnel o Curva de Convergencia del Macizo,
y Curva Característica del Sostenimiento o Curva de Confinamiento

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

CURVA CARACTERÍSTICA DEL TÚNEL

➤ Convergencia del túnel:

Movimiento de cierre de la cavidad del túnel debida a la relajación de tensiones.

➤ Curva Característica del Túnel o Curva de Convergencia del Macizo:

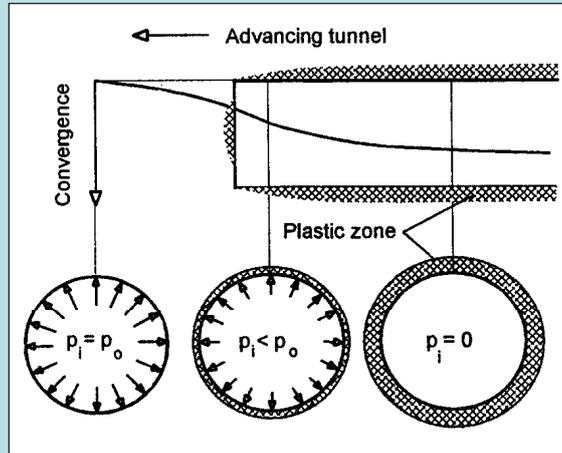
La función que liga la convergencia con la presión de confinamiento de la cavidad.

➤ Línea Característica del Sostenimiento:

La función que liga el movimiento del sostenimiento con la presión del mismo.

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

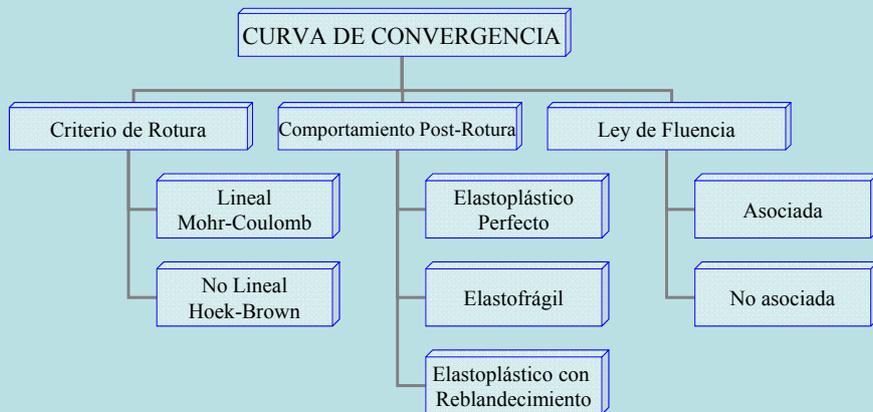
CURVA CARACTERÍSTICA DEL TÚNEL



Comportamiento tridimensional del macizo alrededor del túnel → Deformación Plana

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

FACTORES QUE INFLUYEN EN EL CÁLCULO DE LA CURVA CARACTERÍSTICA DEL TÚNEL



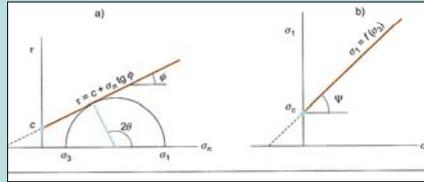
Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

CRITERIOS DE ROTURA: $q=f(p)$ o $\sigma_1=f(\sigma_3)$

➤ Lineal: MOHR-COULOMB (cohesión y ángulo de rozamiento interno)

$$\sigma_1' = \frac{1 + \text{sen}\phi'}{1 - \text{sen}\phi'} \cdot \sigma_3' + \frac{2 \cdot c' \cdot \cos\phi'}{1 - \text{sen}\phi'}$$

$$\tau = c' + \sigma' \cdot \text{tg}\phi'$$

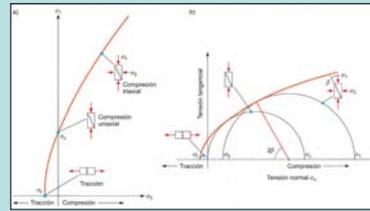


➤ No Lineal: HOEK-BROWN modificado (m_i , GSI , D , σ_{ci})

$$\sigma_1' = \sigma_3' + \sigma_{ci} \cdot \left(m_i \cdot \frac{\sigma_3'}{\sigma_{ci}} + s \right)^a$$

$$mb = m_i \cdot e^{\frac{GSI - 100}{28 - 14 \cdot D}}$$

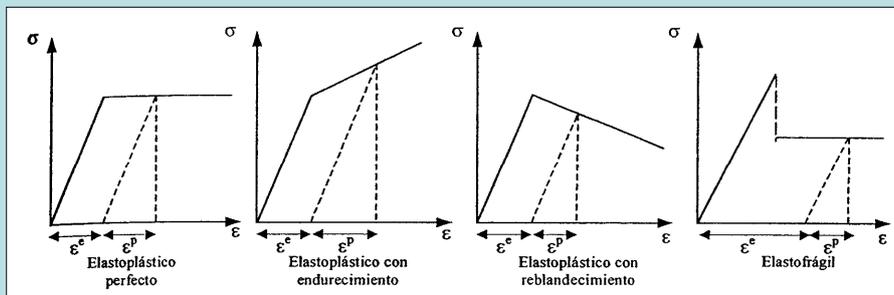
$$s = e^{\frac{GSI - 100}{9 - 3 \cdot D}} \quad a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^{\frac{-GSI}{15}} - e^{\frac{-20}{3}} \right)$$



Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

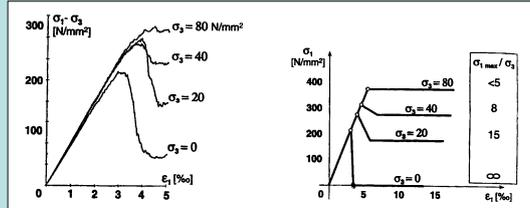
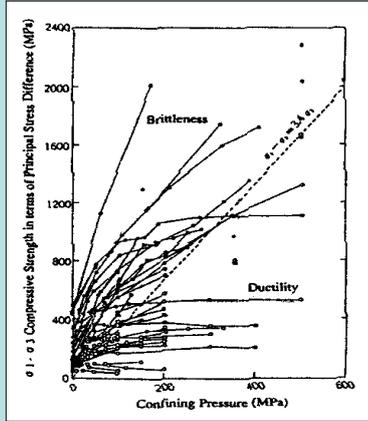
COMPORTAMIENTO POST-ROTURA

➤ Tanto las tensiones como los desplazamientos que se generan durante la excavación de un túnel dependen, fuertemente, del comportamiento tenso-deformacional del macizo y difieren considerablemente según sea frágil, dúctil o elástico.



Comportamiento Post-Rotura de los macizos rocosos

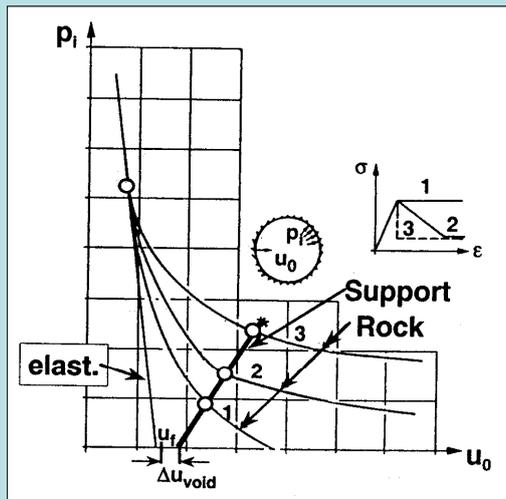
Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados



Simulación Numérica PFC2D
Potyondy et al (1996)

Ensayos de Laboratorio
Transición Frágil-Dúctil (Shigeki 1978)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados



Curvas características de la cavidad y del sostenimiento para un macizo elástico, elastoplástico perfecto (1), elastoplástico con reblandecimiento (2) y elastofrágil (3). (Egger, 2000)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

LEY DE FLUENCIA:

- **Reynolds** (1885). Realizó la primera consideración de la dilatancia (materiales granulares densos), y la describió como el cambio de volumen asociado a la distorsión durante la plastificación.
- **Hansen** (1958). Define el concepto general de “ángulo de dilatancia” como la relación entre el incremento de la deformación volumétrica plástica y el incremento de deformación cortante. Esta definición es válida para la hipótesis de deformación plana.
- **Cristescu** (1982). Define la dilatancia como “una propiedad mecánica de las rocas que se manifiesta con presiones de confinamiento bajas, aumentando su afección con la deformación principal en la fase previa a la rotura” y propone su cuantificación mediante la determinación del ángulo de dilatancia.
- **Lama y Vutukuri** (1982) y **Farmer** (1983). Ensayos experimentales muestran que la dilatancia existe tanto en **materiales dúctiles** como **frágiles**.
- **Veermer-Borst** (1984), **Ogawa** (1986) y **Papanastasiou et al** (1994). Proponen expresiones para obtener el ángulo de dilatancia a partir de ensayos triaxiales teniendo en cuenta la presión de confinamiento. Estos autores han comprobado cómo la **deformación volumétrica plástica que se produce a lo largo de la trayectoria de cargas depende, fuertemente, de las tensiones (fluencia lineal)**.

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

LEY DE FLUENCIA:

➤ Es necesario adoptar una *ley de fluencia no asociada*, especialmente *en los casos de deformación plana en materiales isótropos con criterios de rotura independientes de la tensión principal intermedia*.

➤ La *dilatancia* depende, principalmente, de la *tensión de confinamiento*, del *nivel de deformación plástica* y de la *escala*, disminuyendo esta a medida que aumentan estas variables (Detournay 1986 y Alonso-Alejano 2005).

Expresión General: $sen v = N(sen \rho)$ (función de la tensión en rotura).

Ejemplos:

$$sen v = sen \rho$$

Dilatancia Asociada

$$sen v = sen v_0$$

Dilatancia Constante

$$sen v = \lambda(sen \rho - sen \rho_{crit})$$

Dilatancia Lineal

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

LEY DE FLUENCIA: Criterio de rotura Mohr-Coulomb

Se adopta una *ley de fluencia lineal*: $sen v = \lambda sen \rho$

Hoek-Brown (1997):

Calidad del Macizo	Ángulo de Dilatancia (v)
Muy Buena (I)	$\rho/2$
Buena (II)	$\rho/4$
Media (III)	$\rho/8$
Mala-Muy Mala (IV-V)	0

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

LEY DE FLUENCIA: Criterio de rotura Hoek-Brown

Se propone el empleo de una *ley de fluencia lineal*:

$$sen v = \frac{sen v_{m\acute{a}xima}}{1 - sen \rho_{cr\acute{i}tico}} (sen \rho - sen \rho_{cr\acute{i}tico})$$

- **Ángulo Crítico** ($sen \rho_{cr\acute{i}tico}$) definido como el ángulo de rozamiento instantáneo a partir del cual el macizo deja de ser dilatante positivo. Su valor varía entre 0 ($\sigma_1/\sigma_3=1$) y 30° ($\sigma_1/\sigma_3=5$).

Macizos rocosos variará entre 0° ($\sigma_1=\sigma_3$), 11,5° ($\sigma_1=2\sigma_3$) y 19,5° ($\sigma_1=3\sigma_3$), aproximadamente y dependiendo del valor de ζ .

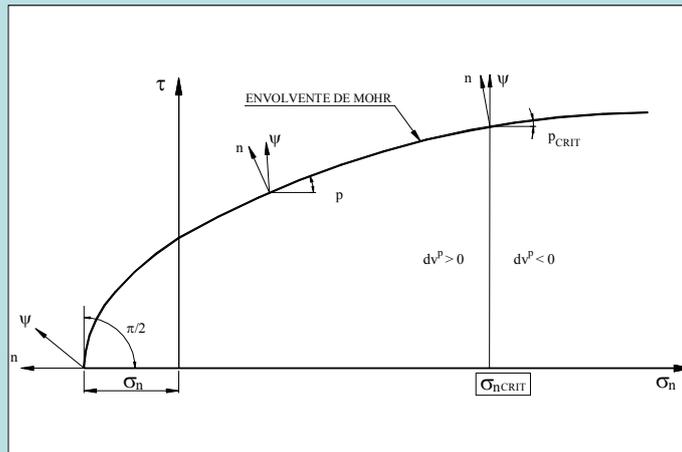
$$sen \rho_{cr\acute{i}tico} = \frac{(\sigma_1 / \sigma_3) - 1}{(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}) + 1 + 2 \sqrt{1 + ((\frac{\sigma_1}{\sigma_3}) - 1)^2 \frac{\zeta}{2}}}$$

- **Ángulo de Dilatancia Máxima** ($sen v_{M\acute{a}xima}$) definido como el ángulo máximo de dilatación que se produce cuando el macizo está en tracción simple. Su valor es de 90° ($\pi/2$).

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

LEY DE FLUENCIA: Criterio de rotura Hoek-Brown

$$\text{sen } v = \frac{\text{sen } v_{\text{máximo}}}{1 - \text{sen } \rho_{\text{crítico}}} (\text{sen } \rho - \text{sen } \rho_{\text{crítico}})$$



Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

LEY DE FLUENCIA: Criterio de rotura Hoek-Brown

➤ Se adopta una ley de fluencia lineal:

$$\text{sen } v = \lambda \cdot \text{sen } \rho - a$$

$$\lambda = \frac{\text{sen } v_{\text{máximo}}}{1 - \text{sen } \rho_{\text{crítico}}}$$

$$a = \frac{\text{sen } v_{\text{máximo}} \cdot \text{sen } \rho_{\text{crítico}}}{1 - \text{sen } \rho_{\text{crítico}}}$$

Calidad del Macizo	Ángulo de Dilatancia (v)
Muy Buena (I)	$\text{sen } v = 2 \cdot \text{sen } \rho - 1,0$ ($\lambda=2$ y $a=1$)
Buena (II)	$\text{sen } v = 1,5 \cdot \text{sen } \rho - 0,5$ ($\lambda=1,5$ y $a=0,5$)
Media (III)	$\text{sen } v = 1,25 \cdot \text{sen } \rho - 0,25$ ($\lambda=1,25$ y $a=0,25$)
Mala-Muy Mala (IV-V)	$\text{sen } v = 0$ ($\lambda=0$ y $a=0$)

* Si $\text{sen } v = \text{sen } \rho$ ($\lambda=1$; $a=0$; Dilatancia asociada)

* Si $\text{sen } v = -\text{sen } v_0$ ($\lambda=0$; $a=-\text{sen } v_0$; Dilatancia constante)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

- En Elasticidad existe una relación biunívoca entre tensiones y deformaciones.

Ley de Hooke

- En Plasticidad no, ya que un mismo estado de tensiones puede producir una variedad infinita de deformaciones, según la trayectoria de tensiones seguida hasta llegar a ese estado.

Por tanto, las deformaciones en plasticidad no pueden estudiarse directamente, sino tan sólo como una integración de las deformaciones elementales producidas por cada variación infinitesimal de las tensiones a lo largo de una trayectoria de tensiones.

Regla de Flujo

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

FORMULACIÓN ANALÍTICA GENERAL PARA MACIZOS ELASTOPLÁSTICOS

- Ecuaciones que rigen el comportamiento:

- Generales de Mecánica del Continuo:

- ✓ Ecuación de equilibrio interno de tensiones
- ✓ Ecuación de Continuidad (Compatibilidad)

- Ecuaciones Constitutivas:

- ✓ Leyes Elásticas: ley de Hooke
- ✓ Leyes Anelásticas: ley de fluencia

- Ecuación de Consistencia (tensiones zona plástica verifican el criterio de rotura)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

➤ **Ecuación de Equilibrio Interno:**

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

Expresada en Variables Lambe:

$$\frac{d(p-q)}{dr} + \frac{(-2.q)}{r} = 0$$

$$p = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \quad q = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}$$

➤ **Sistema diferencial:**

$$dp = 0; p = C_1$$

$$d(r^2 q) = 0; q = \left(\frac{C_2}{r^2}\right)$$

➤ **Solución comportamiento elástico:**

- Tensiones antes de la apertura:

$$p = p^0; q = 0$$

se obtiene $C_1 = p_0$

- Tensiones después de la apertura:

para $r = a \rightarrow q = q_a = p_0 - \sigma_a$ (σ_a conocido)

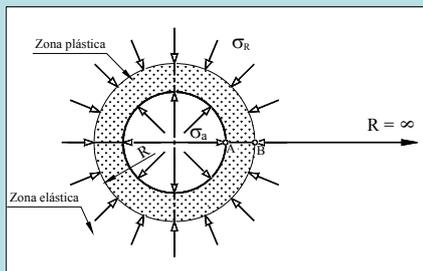
se obtiene $C_2 = q_a \cdot a^2$

siendo $p = p_0$ y $q = (p_0 - \sigma_a) \cdot (a/r)^2$

- Tensión radial $\sigma_r = p - q$
- Tensión tangencial $\sigma_\theta = p + q$

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

TENSIONES EN LA ZONA ELÁSTICA



➤ **Solución comportamiento elástoplástico para la zona elástica:**

- Tensiones antes de la apertura:

$$p = p^0; q = 0$$

- Tensiones después de la apertura:

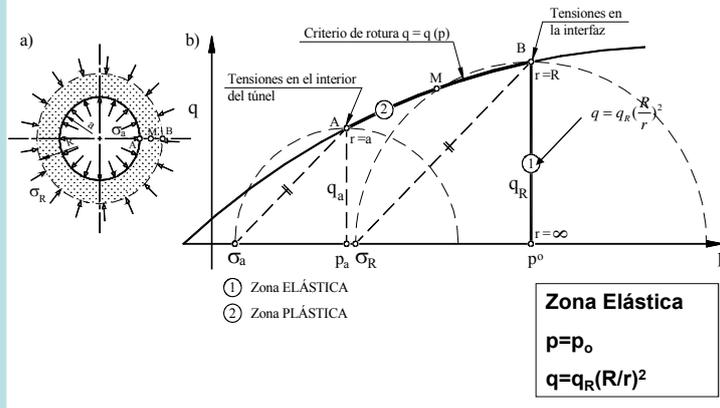
para $r = R \rightarrow q = q_R = p_0 - \sigma_R \rightarrow q_R$ debe verificar el criterio de rotura $\rightarrow q = f(p) \rightarrow q_R = f(p_0)$

y se obtiene $C_2 = q_R \cdot R^2$

siendo $p = p_0$ y $q = q_R \cdot (R/r)^2$

- Tensión radial $\sigma_r = p - q$
- Tensión tangencial $\sigma_\theta = p + q$

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados



a) ESQUEMA CON LAS CONDICIONES DE CONTORNO

b) DIAGRAMA DE MOHR DE TENSIONES

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

DEFORMACIONES EN LA ZONA ELÁSTICA

➤ **Cambio de tensiones:**

$$\Delta p = 0$$

$$\Delta q = q_R \left(\frac{R}{r} \right)^2$$

➤ **Ecuaciones de Hooke:**

$$v = (1 - 2\mu) \frac{\Delta p}{G}$$

$$\gamma = \frac{\Delta q}{G}$$

➤ **Deformaciones:**

$$v = 0$$

$$\gamma = \frac{q_R}{G} \left(\frac{R}{r} \right)^2$$

• Deformaciones en el interfaz (r=R)

$$v_r = 0 \quad \gamma_r = \frac{q_R}{G}$$

$$\varepsilon_{rk} = \frac{v_r - \gamma_r}{2} = -\frac{q_R}{2G}$$

• Deformaciones principales:

$$\varepsilon_{or} = \frac{v_r + \gamma_r}{2} = \frac{q_R}{2G} \quad \varepsilon_{or} = \frac{u_r}{R} = \frac{q_R}{2G}$$

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

TENSIONES EN LA ZONA PLÁSTICA

➤ **Sistema diferencial:**

• $2 \frac{dr}{r} = B(q) dq$ Equilibrio interno

• $q = q(p)$ Criterio de rotura

siendo:

• $B(q) = \left(\frac{dp}{dq} - 1 \right) \frac{1}{q} = \left(\frac{1}{\text{sen} \rho} - 1 \right) \frac{1}{q}$

• $\text{sen} \rho = \frac{dq}{dp}$ Rozamiento instantáneo

➤ **Solución:**

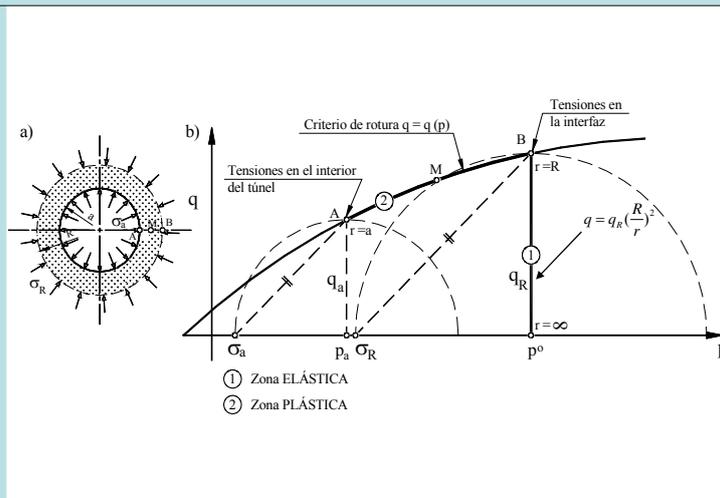
• Ley General

$$\ln \left(\frac{r}{R} \right)^2 = \int_{q_a}^q B(q) dq$$

• Radio de Plastificación

$$\ln \left(\frac{a}{R} \right)^2 = \int_{q_a}^{q_a} B(q) dq$$

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados



a) ESQUEMA CON LAS CONDICIONES DE CONTORNO

b) DIAGRAMA DE MOHR DE TENSIONES

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

DEFORMACIONES EN LA ZONA PLÁSTICA

➤ **Sistema Gobernante:**

- Equilibrio Interno: $2 \frac{dr}{r} = B(q) dq$
- Consistencia: $\frac{dq}{dp} = \text{sen} \rho$
- Compatibilidad: $u = r \cdot \varepsilon_\theta$
- Deformación Total:

$$dv = dv^e + dv^p \quad d\gamma = d\gamma^e + d\gamma^p$$
- Ecuaciones Constitutivas
 Elástica: $dv^e = (1 - 2\mu) \frac{dp}{G} \quad d\gamma^e = \frac{dq}{G}$
 Plástica:

$$-\frac{dv^p}{d\gamma^p} = \text{sen} \nu = N(\text{sen} \rho)$$

➤ **Sistema Resolvente:**

- $(1 - \text{sen} \nu) \frac{d\gamma}{dq} + B(q) \gamma = -\frac{E(q)}{G}$
 - $\frac{d\varepsilon_\theta}{dq} = -\frac{B(q)}{2} \gamma$
- con:
- $B(q) = \left(\frac{1}{\text{sen} \rho} - 1 \right) \frac{1}{q}$
 - $E(q) = \text{sen} \nu + \frac{1 - 2\mu}{\text{sen} \rho}$

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

➤ La **solución de la primera ecuación** permite determinar γ :

$$\gamma = Cte \left(1 - \frac{1}{G} \int_{q_0}^q \frac{E(q)}{1 - \text{sen} \nu} e^{H(q_r, q)} dq \right) e^{-H(q_r, q)} \quad H(q_r, q) = \int_{q_r}^q \frac{B(q)}{1 - \text{sen} \nu} dq$$

y la **solución de la segunda ecuación**, una vez obtenida γ , permite determinar ε_q :

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_{\theta r} = - \int_{q_r}^q \frac{B(q)}{2} \gamma dq$$

$$\Omega = \frac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon_{\theta r}} - 1 \quad \varepsilon_{\theta r} = \frac{\gamma_r}{G} = \frac{q_r}{2G} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

➤ **Criterio de Mohr-Coulomb:**

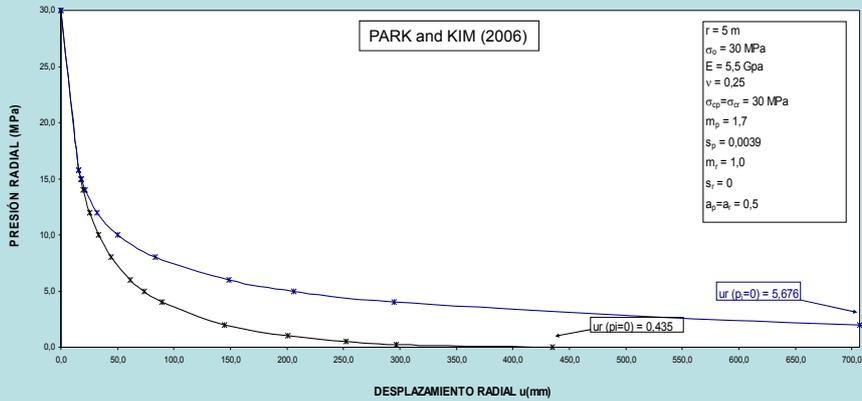
$$B(q) = \frac{n}{q} \quad \text{sen} \nu = \lambda \text{sen} \rho$$

➤ **Criterio de Hoek&Brown:** $B(q) = 1 \quad \text{sen} \nu = \frac{\text{sen} \nu_{\text{máximo}}}{1 - \text{sen} \rho_{\text{crítico}}} (\text{sen} \rho - \text{sen} \rho_{\text{crítico}})$

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIONES

CURVA DE CONVERGENCIA Hoek-Brown ($\psi=0^\circ$ y $\psi=30^\circ$)

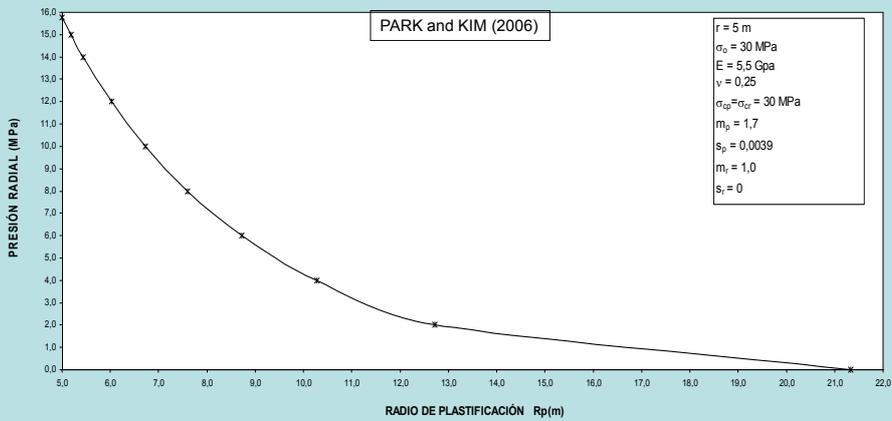


Curva de convergencia (H&B Original) – Influencia de la Dilatancia ($\psi=0^\circ$ y $\psi=30^\circ$)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIONES

PRESIÓN - RADIO DE PLASTIFICACIÓN
Hoek-Brown ($\psi=0^\circ$ y $\psi=30^\circ$)



Radio de Plastificación en función de la presión interna radial (H&B Original)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

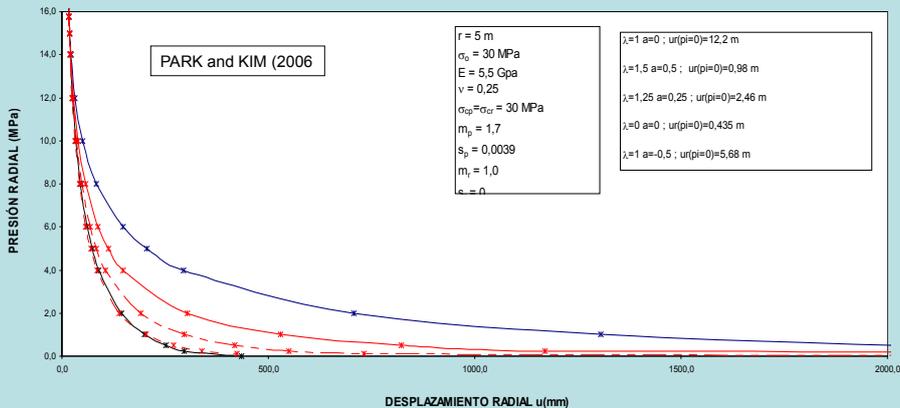
Ejemplo Elastofrágil	k.-H. Park, Y.-J. Kim [51]		Este trabajo	
	(u.E)/(Radio.po) $\Psi=0$ a $\Psi=30^\circ$	Rplastico/a (m)	(u.E)/(Radio.po) $\Psi=0$ a $\Psi=30^\circ$	Rplastico/a (m)
k.-H. Park, Y.-J. Kim [51] H&B original	$\approx 2.55-7.5$	≈ 1.85	2.698-7.557	1.885

Curva de convergencia (H&B Original) – Influencia de la Dilatancia ($\psi=0^\circ$ y $\psi=30^\circ$)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIONES

CURVA DE CONVERGENCIA Hoek-Brown ($\psi=0^\circ$ - $\psi=30^\circ$ - Ley Fluencia Lineal)

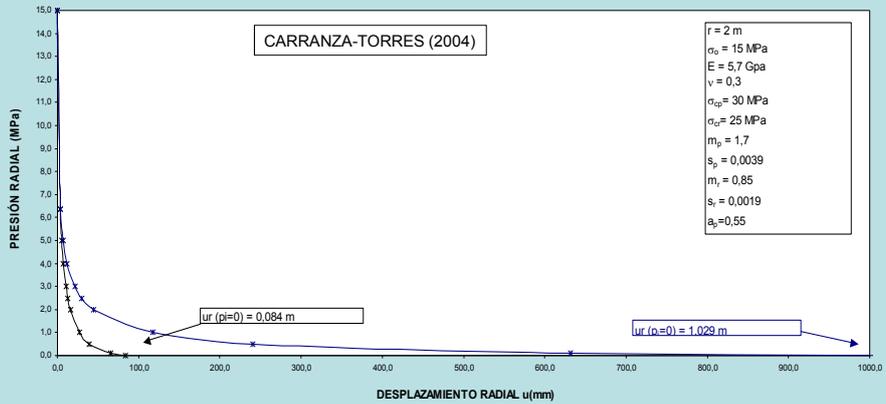


Curva de convergencia (H&B Original) – Influencia de la Dilatancia ($\psi=0^\circ$ - $\psi=30^\circ$ -Dilatancia Lineal)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIONES

CURVA DE CONVERGENCIA Hoek-Brown ($\psi=0^\circ$ y $\psi=30^\circ$)

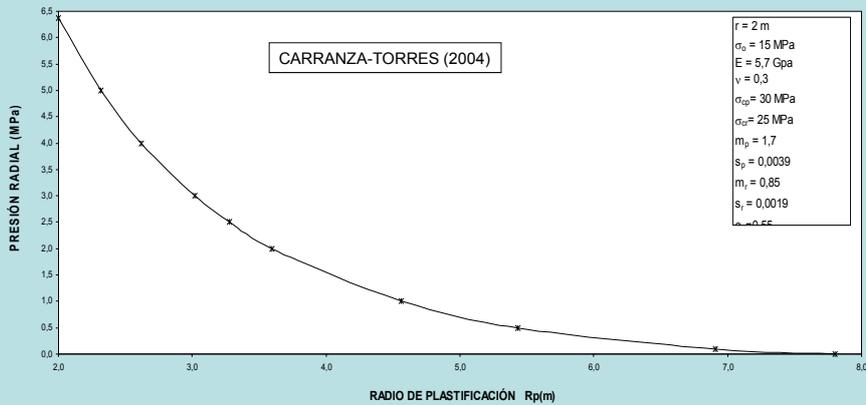


Curva de convergencia (H&B Modificado) – Influencia de la Dilatancia ($\psi=0^\circ$ y $\psi=30^\circ$)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIONES

PRESIÓN - RADIO DE PLASTIFICACIÓN
Hoek-Brown ($\psi=0^\circ$ y $\psi=30^\circ$)

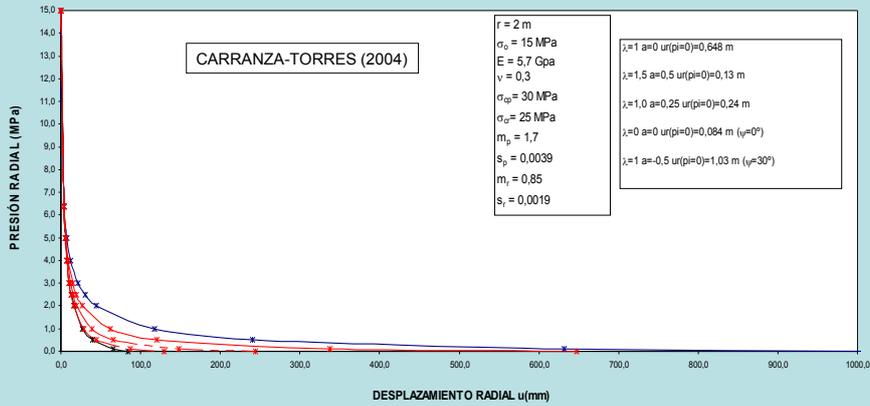


Radio de Plastificación en función de la presión interna radial (H&B Modificado)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIONES

CURVA DE CONVERGENCIA Hoek-Brown ($\psi=0^\circ$ - $\psi=30^\circ$ - Ley Fluencia Lineal)

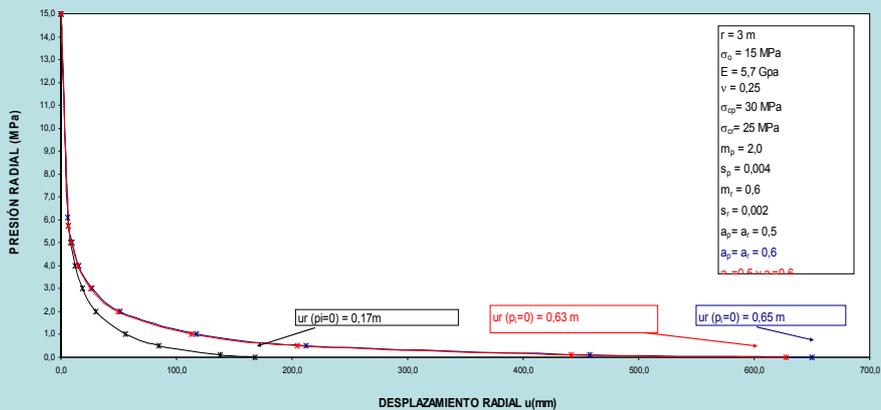


Curva de convergencia (H&B Modificado) – Influencia de la Dilatancia ($\psi=0^\circ$ - $\psi=30^\circ$ - Dilatancia Lineal)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIONES

CURVA DE CONVERGENCIA Hoek-Brown ($\psi=15^\circ$)

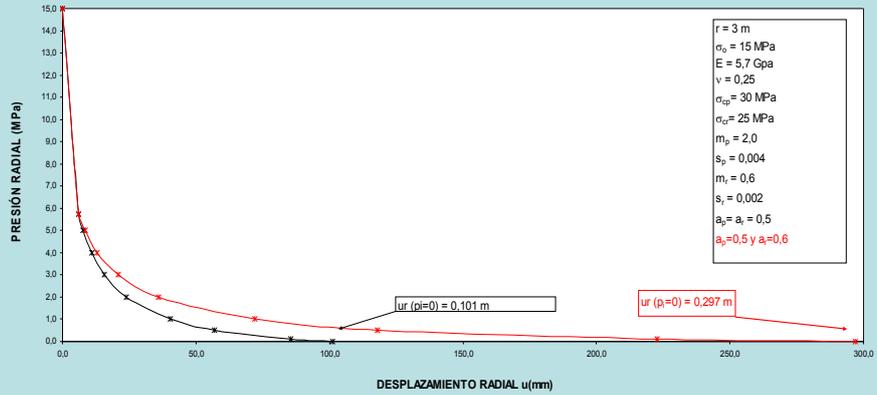


Curva de convergencia (H&B Modificado) – Influencia de "a" ($\psi=15^\circ$)

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIONES

CURVA DE CONVERGENCIA Hoek-Brown ($\psi=5^\circ$)

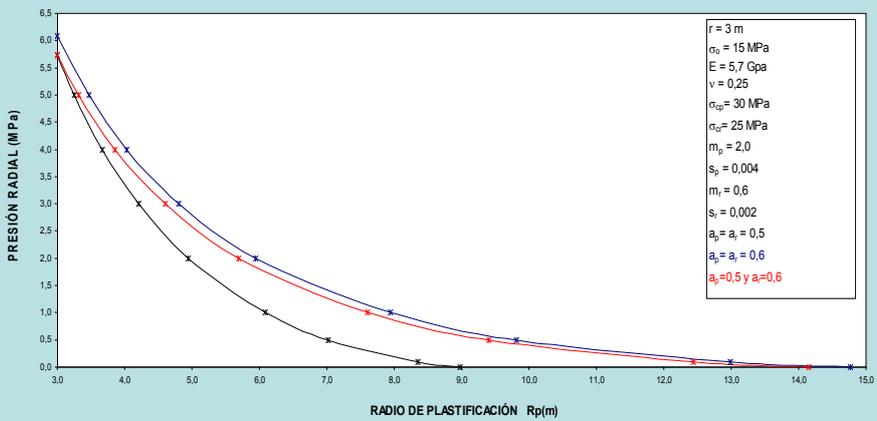


*Curva de convergencia (H&B Modificado) – Influencia de “a”
($\psi=5^\circ$)*

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIONES

**PRESIÓN - RADIO DE PLASTIFICACIÓN
Hoek-Brown ($\psi=15^\circ$)**



Radio de Plasticación en función de la presión interna radial (H&B Modificado)- Influencia “a”

Curvas de Convergencia: efecto de algunos modelos constitutivos avanzados

BIBLIOGRAFÍA

- Panet, M. (1995). "Le calcul des tunnels par la méthode des courbes convergence-confinement". Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Paris.
- Carranza-Torres, C. Elasto-plastic solution of tunnel problems using the generalized form of the Hoek-Brown failure criterion. In: Hudson JA, Xia-Ting F, editors. Sinorock 2004 Symposium, China, 2004. Int. J. Rock Mech Min Sci 2004; 41 (3):480-1.
- Sharan SK. "Exact and approximate solutions for displacements around circular openings in elastic-brittle-plastic Hoek-Brown rock". Int. J. Rock Mech Min Sci 2005; 42: 542-9.
- Kyung – Ho Park, Yong-Jin Kim. "Analytical solution for a circular opening in an elastic-brittle-plastic rock. Int. J. Rock Mech Min Sci 2005; 43: 616-22".
- L.R. Alejamo, E. Alonso. "Considerations of the dilatancy angle in rocks and rock masses". Int. J. Rock Mech Min Sci 2005; 42: 481-507.
- Ypun-Kyou Lee, S. Pietruszczak "A new numerical procedure for elasto-plastic analysis of a circular opening excavated in a strain-softening rock mass". Tunnelling and Underground Space Technology, 23 (2008) 588-599.